Алгебра и начала математического анализа

10

МГУ-школе

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Алгебра и начала математического анализа

10 класс

УЧЕБНИК ДЛЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ

Базовый и профильный уровни

МГУ-школе

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

8-е издание

Москва
«Просвещение»
2009

УДК 373.167.1: [512+517]
ББК 22.14я72
А45

Авторы: С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106–5215/15 от 31.10.07) и Российской академии образования (№ 01–207/5/7д от 11.10.07)

Условные обозначения:

■ — начало материала, необязательного для базового уровня

● — окончание материала, необязательного для базового уровня

1.3* — пункт для углубленного изучения

▒ — факты, свойства, определения, формулы, которые нужно помнить

1.2 — задания для базового уровня

6.8 — задания для профильного уровня

5.1° — задания для устной работы

3.7* — задания повышенной трудности

123 — задания для повторения

Алгебра и начала математического анализа. 10 класс :
А45 учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. — 8-е изд. — М. : Просвещение, 2009. — 430 с. : ил. — ISBN 978-5-09-021132-1.

Учебник соответствует федеральным компонентам государственного стандарта общего образования по математике и содержит материал как для базового, так и для профильного уровня. По нему можно работать независимо от того, по каким учебникам учились школьники в предыдущие годы.

Учебник нацелен на подготовку учащихся к поступлению в вузы.

УДК 373.167.1: [512+517]
ББК 22.14я72+22.161я72

ISBN 978-5-09-021132-1

Глава I
Корни, степени, логарифмы

$$\sqrt{a^2}=a$$

$$3^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{3^2}$$

$$2^{\log_2 5}=5$$

§ 1. Действительные числа

1.1. Понятие действительного числа

Первые числа, с которыми вы познакомились в школе, — это **натуральные числа**: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Множество натуральных чисел обладает тем свойством, что сумма и произведение любых двух натуральных чисел являются натуральными числами, а разность и частное необязательно являются натуральными числами.

Затем вы изучали **целые числа**. Множество целых чисел состоит из натуральных чисел, целых отрицательных чисел и числа «нуль»: ... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...

Сумма, разность и произведение любых двух целых чисел являются целыми числами, а частное не всегда целое число. Вопросы, связанные с делимостью целых чисел, рассмотрены в пп. 1.8—1.10.

Наконец, вы узнали, что есть **рациональные числа**. Число называют рациональным, если его можно записать в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p — целое число, а q — натуральное.

Сумма, разность, произведение и частное любых двух рациональных чисел являются рациональными числами (на нуль делить нельзя!).

Каждое рациональное число может быть разложено в бесконечную десятичную периодическую дробь (для нахождения этого разложения можно разделить уголком числитель дроби p на ее знаменатель q).

Верно и обратное: каждая периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого рационального числа.

Таким образом, рациональные числа имеют два представления (две формы записи) — одно в виде дроби $\frac{p}{q}$, а другое в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Наряду с бесконечными десятичными периодическими дробями существуют и бесконечные десятичные непериодические дроби, которые называют **иррациональными числами.** Рациональные и иррациональные числа составляют множество всех **действительных чисел.**

Таким образом, действительное число — это число, которое можно записать в виде бесконечной десятичной дроби. Если число рациональное, то дробь периодическая; если число иррациональное, то дробь непериодическая.

Итак, каждое положительное действительное число можно записать в виде $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$, а каждое отрицательное число — в виде $-\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$. При этом неотрицательное число α_0 или хотя бы одна из цифр $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$ отличны от нуля. Число «нуль» можно записать в виде

$$0 = 0,000... = +0,000... = -0,000... .$$

Вообще, каждое действительное число a имеет только одно десятичное разложение, если бесконечные десятичные дроби с периодом 9 не рассматривать.

Формально конечную десятичную дробь можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби двумя способами, например:

$$2,4 = 2,4000... = 2,4(0),$$
$$2,4 = 2,3999... = 2,3(9).$$

Однако принято бесконечные десятичные дроби с периодом 9 не рассматривать, что позволяет, в частности, правильно сравнивать периодические десятичные дроби.

Бесконечные десятичные дроби сравнивают по тем же правилам, что и конечные десятичные дроби. Правила сложения, вычитания, умножения и деления бесконечных десятичных дробей сложнее соответствующих правил для конечных десятичных дробей. Эти правила требуют применения бесконечных процессов и представляют лишь теоретический интерес. Поэтому здесь они не приводятся. Достаточно знать, что сумма, разность, произведение и частное любых двух действительных чисел есть действительное число, и притом единственное (на нуль делить нельзя!). На практике арифметические действия с бесконечными десятичными дробями (т. е. с действительными числами) выполняют приближенно, точно так же как выполняют приближенно арифметические действия с конечными десятичными дробями.

С бесконечными десятичными дробями тесно связано измерение отрезков. Если задан отрезок, длина которого принята за единицу, то длина a любого отрезка AB выражается бесконечной десятичной дробью:

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n... .$$

Это означает, что:

α_0 — приближенная длина отрезка AB с точностью до 1 с недостатком;

α_0,α_1 — приближенная длина отрезка AB с точностью до 0,1 с недостатком;

$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2$ — приближенная длина отрезка AB с точностью до 0,01 с недостатком и т. д.

Произвольный отрезок AB имеет длину, равную некоторому положительному числу — положительной десятичной дроби; обратно, если дано любое положительное число, то можно указать отрезок AB, длина которого равна этому числу.

Действительные числа отождествляют с точками координатной оси. Напомним, как это делается.

Зададим прямую, на которой выбрано направление, называемое положительным, и взята точка O, называемая начальной точкой координатной оси. Зададим еще отрезок, длину которого примем за единицу, — единичный отрезок (рис. 1).

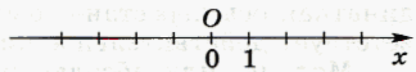


Рис. 1

Прямую, на которой выбраны начальная точка, положительное направление и единичный отрезок, называют координатной осью. На рисунке 1 координатная ось нарисована горизонтально, с положительным направлением, идущим вправо от точки O. Но вообще говоря, координатная ось может быть расположена вертикально или произвольно и положительное направление на ней можно выбрать так, как это удобно в каждом случае.

Начальная точка O делит координатную ось на два луча. Один из них, идущий от точки O в положительном направлении, называют положительным, другой — отрицательным.

Каждой точке координатной оси поставим в соответствие действительное число x по следующему правилу. Начальной точке O поставим в соответствие число «нуль» ($x=0$); точке A, находящейся на положительном луче, поставим в соответствие число x, равное длине отрезка OA ($x=OA$), точке B, находящейся на отрицательном луче, поставим в соответствие число x, равное длине отрезка OB, взятой со знаком «–» ($x=-OB$). Например, на рисунке 2 точки A, O и B имеют координаты 3, 0 и –2 соответственно. Пишут: $A(3)$, $O(0)$, $B(-2)$.

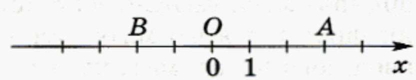


Рис. 2

Определенную таким образом координатную ось называют координатной осью x или коротко осью x. Пишут также: ось Ox. Число x, соответствующее произвольной точке оси x согласно указанному правилу, называют координатой этой точки. Для краткости точку, имеющую координату x, называют точкой x. Буква x может быть заменена другой буквой, например буквами y, z, t, ..., и тогда говорят об оси y, оси z, оси t и т. д.

Согласно указанному правилу верны утверждения:

1. Каждой точке оси x соответствует действительное число — координата этой точки.

2. Две различные точки A и B оси x имеют различные координаты x_1 и x_2.

3. Каждое действительное число есть координата некоторой точки оси x.

Иначе говоря, установлено взаимно-однозначное соответствие между точками оси Ox и действительными числами.

Замечание. Отметим, что точки, имеющие рациональные координаты, не заполняют полностью координатную ось — без иррациональных точек ось «дырявая». Если же рассматривать все точки, имеющие и рациональные, и иррациональные координаты, то координатная ось перестанет быть «дырявой» — каждой ее точке соответствует действительное число.

Модуль, или абсолютную величину действительного числа a обозначают $|a|$; по определению

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0 \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

На координатной оси $|a|$ есть расстояние от точки a до начала координат (рис. 3).

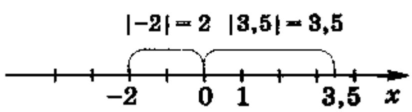


Рис. 3

Зададим на плоскости две взаимно перпендикулярные оси координат — ось x и ось y с равными единичными отрезками и пересекающиеся в точке O, являющейся начальной точкой каждой из этих осей.

Говорят, что этим на плоскости определена прямоугольная система координат xOy. Ее называют еще декартовой системой координат по имени французского математика и философа Р. Декарта (1596—1650), введшего в математику это важное понятие.

Ось x называют осью абсцисс, а ось y — осью ординат. Точку O пересечения осей координат называют началом координат. Плоскость, на которой задана декартова система координат, называют координатной плоскостью.

Обычно ось абсцисс изображают в виде горизонтальной прямой, направленной вправо, а ось ординат — в виде вертикальной прямой, направленной вверх.

Пусть A есть произвольная точка координатной плоскости. Проведем через точку A прямые, перпендикулярные осям координат (рис. 4). Получим на оси x точку A_1, а на оси y точку A_2. Эти точки называют проекциями точки A на оси координат. Абсциссой точки A называют координату x точки A_1 — проекции точки A на ось x. Ординатой точки A называют координату y точки A_2 — проекции точки A на ось y. Абсциссу x и ординату y точки A называют координатами точки A.

Координаты точки записывают в скобках рядом с буквой, обозначающей эту точку: $A\ (x;\ y)$, причем на первом месте пишут абсциссу, а на втором — ординату. Например, точка A, изображенная на рисунке 5, имеет абсциссу $x = 4$ и ординату $y = 3$, поэтому пишут $A\ (4;\ 3)$.

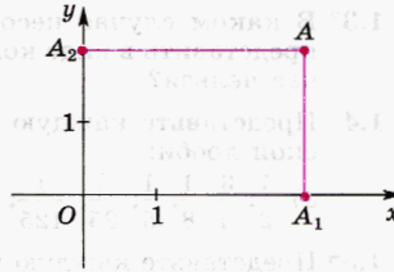


Рис. 4

Отметим, что если на плоскости задана прямоугольная система координат, то каждой точке A плоскости приводится в соответствие пара чисел $(x;\ y)$ — пара координат точки A, и в то же время произвольную пару чисел $(x;\ y)$ можно рассматривать как пару координат некоторой точки A плоскости.

Нужно иметь в виду, что если пара состоит из разных чисел, то, поменяв эти числа местами, получим другую пару, определяющую другую точку плоскости. Поэтому часто пару координат $(x;\ y)$ точки A называют упорядоченной парой чисел.

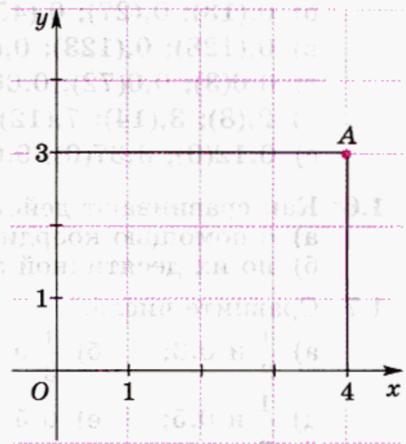


Рис. 5

Итак, если на плоскости задана прямоугольная система координат xOy, то:

1) каждой точке плоскости поставлена в соответствие упорядоченная пара чисел (пара координат точки);

2) разным точкам плоскости поставлены в соответствие разные упорядоченные пары чисел;

3) каждая упорядоченная пара чисел соответствует некоторой точке плоскости.

1.1° Какие числа называют:
а) натуральными; б) целыми; в) рациональными;
г) иррациональными; д) действительными?

1.2 Может ли:
а) разность отрицательных чисел быть положительным числом;
б) сумма иррациональных чисел быть рациональным числом;
в) произведение иррациональных чисел быть рациональным числом?

1.3° В каком случае несократимую обыкновенную дробь можно представить в виде конечной десятичной дроби, а в каком случае нельзя?

1.4 Представьте каждую обыкновенную дробь в виде периодической дроби:

а) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{25}$; $\frac{1}{125}$; б) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{1}{7}$.

1.5* Представьте каждую периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(3); 0,(1); 0,(5); 0,(7);

б) 0,(13); 0,(27); 0,(45); 0,(54);

в) 0,(128); 0,(123); 0,(945); 0,(138);

г) 0,0(3); 0,0(72); 0,00(13); 0,0(549);

д) 2,(8); 3,(14); 7,(12); 3,0(27);

е) 0,12(0); 3,37(0); 0,005(0).

1.6° Как сравнивают действительные числа:

а) с помощью координатной прямой;

б) по их десятичной записи?

1.7 Сравните числа:

а) $\frac{1}{3}$ и 0,3; б) $\frac{1}{3}$ и 0,(3); в) 0,3 и 0,(3); г) 0,5 и $\frac{1}{2}$;

д) $\frac{1}{3}$ и 0,5; е) 0,5 и 0,(5); ж) $-\frac{1}{5}$ и $-0{,}2$;

з) $-\frac{1}{5}$ и $-0{,}(2)$; и) $-0{,}2$ и $-0{,}(2)$; к) $-0{,}45$ и $-0{,}(45)$;

л) $-0{,}45$ и $-\frac{5}{11}$; м) $-\frac{5}{11}$ и $-0{,}(46)$.

1.8 Расположите в порядке возрастания числа:

а) π; 3,(14); $3\frac{1}{7}$; 3,141;

б) $-5{,}6789101112\ldots$; $-5\frac{2}{3}$; $-5\frac{8}{9}$; $-5{,}(7)$; $-5{,}9$.

1.9° Верно ли, что каждой точке координатной оси соответствует действительное число и каждому действительному числу соответствует точка координатной оси?

1.10° Верно ли, что любой упорядоченной паре действительных чисел $(x; y)$ соответствует единственная точка координатной плоскости и каждой точке координатной плоскости соответствует единственная упорядоченная пара действительных чисел $(x; y)$?

1.11 Укажите на координатной оси числа a и $-a$, если: а) $a = 3$; б) $a = -4$.

1.12 Вычислите расстояние между точками $A(a)$ и $B(b)$ координатной оси, если:
а) $a = 5$, $b = -1$; б) $a = -7$, $b = 8$;
в) $a = -13{,}5$, $b = -11$; г) $a = -55$, $b = -10$.

1.13° а) В каком случае говорят, что задана прямоугольная система координат?
б) Как называют оси Ox и Oy?
в) Что такое абсцисса точки; ордината точки?

1.14 Вычислите расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ координатной плоскости, если:
а) $x_1 = 2$, $y_1 = 7$; $x_2 = -1$, $y_2 = 3$;
б) $x_1 = -3$, $y_1 = -7$, $x_2 = 2$, $y_2 = 5$.

1.15 Найдите все числа x, для каждого из которых верно равенство:
а) $|x| = 3$; б) $|x| = 5$; в) $|x - 3| = 2$;
г) $|x + 3| = 5$; д) $|2x - 3| = 4$; е) $|3x + 4| = 2$.
Укажите их на координатной оси.

1.16 Решите уравнение:
а) $|x| = 10$; б) $|x| = 9$; в) $|2x| = 3$;
г) $|3x| = 7$; д) $|x - 5| = 12$; е) $|x + 2| = 7$;
ж) $|2x - 5| = 7$; з) $|3x + 5| = 8$; и) $|5x - 8| = 0$.

1.17* Решите уравнение:
а) $||x| - 2| = 10$; б) $||x| - 9| = 7$.

1.18* а) Докажите, что расстояние между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ вычисляется по формуле $AB = |x_1 - x_2|$.
б) Докажите, что расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

в) Докажите, что координата точки $C(x)$ — середины отрезка AB, где $A(x_1)$ и $B(x_2)$, вычисляется по формуле $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
г) Докажите, что координаты точки $C(x; y)$ — середины отрезка AB, где $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, вычисляются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

д) Докажите, что если точка $C(x)$ принадлежит отрезку AB, где $A(x_1)$ и $B(x_2)$, и делит этот отрезок в отношении $AC : CB = m : n$, то координата точки C вычисляется по формуле $x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m + n}$.

е) Докажите, что если точка $C(x; y)$ принадлежит отрезку AB, где $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, и делит этот отрезок в отношении $AC : CB = m : n$, то координаты точки C вычисляются по формулам: $x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m + n}$; $y = \dfrac{ny_1 + my_2}{m + n}$.

1.19* Докажите, что каждое из чисел $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{2}$ иррациональное.

1.20 Дан квадрат со стороной 1 см. Верно ли, что существует действительное число, выражающее длину диагонали этого квадрата? Какое это число — рациональное или иррациональное?

1.2. Множества чисел. Свойства действительных чисел

Напомним обозначения некоторых множеств чисел, которые вам часто придется рассматривать.

$\boldsymbol{N}$ — множество всех натуральных чисел,
$\boldsymbol{Z}$ — множество всех целых чисел,
$\boldsymbol{Q}$ — множество всех рациональных чисел,
$\boldsymbol{R}$ — множество всех действительных чисел,
$\boldsymbol{R}_+$ — множество всех положительных действительных чисел.

$[a; b]$ — отрезок — множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству $a \leqslant x \leqslant b$, или множество точек оси x, состоящее из точек a и b и всех точек, находящихся между ними.

Точки a и b называют концами отрезка $[a; b]$. Концы отрезка $[a; b]$ принадлежат этому отрезку.

$(a; b)$ — интервал — множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству $a < x < b$, или множество всех точек оси x, находящихся между точками a и b.

$[a; b)$ — полуинтервал — множество всех действительных чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a \leqslant x < b$, или множество точек оси x, состоящее из точки a и всех точек, находящихся между точками a и b.

$(a; b]$ — полуинтервал — множество всех действительных чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a < x \leqslant b$, или множество точек оси x, состоящее из точки b и всех точек, находящихся между точками a и b.

Заметим, что у интервала $(a;\ b)$ и полуинтервала $[a;\ b)$ буква b может обозначать число или $+\infty$, а у интервала $(a;\ b)$ и полуинтервала $(a;\ b]$ буква a может обозначать число или $-\infty$.

Наконец, интервал $(-\infty;\ +\infty)$ — это множество всех действительных чисел или множество всех точек оси x.

Интервал $(a;\ b)$ может быть конечным, если a и b — данные числа (или точки оси x), но может быть и бесконечным, если a или b — это соответственно $-\infty$ или $+\infty$.

Отрезок $[a;\ b]$ всегда конечный. Отрезок определяется данными числами a и b (или точками оси x).

Полуинтервалы $[a;\ b)$ и $(a;\ b]$ могут быть конечными и бесконечными.

Иногда для числовых отрезков, интервалов, полуинтервалов используют общее название — **числовые промежутки** (коротко, промежутки).

ПРИМЕР 1. На рисунке 6, *а — и* показаны числовые промежутки и неравенства, которым удовлетворяют все числа x, принадлежащие этим числовым промежуткам.

а) отрезок $[-1;\ 3]$ $-1 \leqslant x \leqslant 3$

б) интервал $(0;\ 1)$ $0 < x < 1$

в) полуинтервал $[1;\ 2)$ $1 \leqslant x < 2$

г) полуинтервал $(-1;\ 1]$ $-1 < x \leqslant 1$

д) интервал $(-3;\ +\infty)$ $x > -3$

е) интервал $(-\infty;\ -2)$ $x < -2$

ж) интервал $(-\infty;\ +\infty)$

з) полуинтервал $[5;\ +\infty)$ $x \geqslant 5$

и) полуинтервал $(-\infty;\ -3]$ $x \leqslant -3$

Рис. 6

На этих рисунках конец промежутка, принадлежащий ему, показан закрашенной точкой, а не принадлежащий ему — незакрашенной (часто говорят «выколотой») точкой. Иногда вместо штриховки используют дуги. Так на рисунке 7 показаны отрезок $[-1;\ 3]$ и интервал $(-1;\ +\infty)$.

Кроме отрезков, интервалов и полуинтервалов, рассматривают и другие множества чисел, их часто обозначают буквами A, B, C, ...

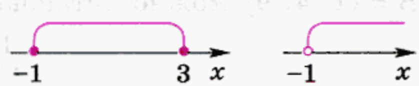


Рис. 7

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют пустым множеством. Его обозначают знаком $\varnothing$.

Тот факт, что число принадлежит или не принадлежит множеству чисел, записывают с помощью специальных знаков: $\in$ — принадлежит и $\notin$ — не принадлежит. Если a является элементом множества A, то пишут $a \in A$ и говорят «a принадлежит A». Если b не является элементом множества A, то пишут $b \notin A$ и говорят «b не принадлежит A».

Объединением множеств *A* и *B* называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств. Объединение множеств A и B обозначают $A \cup B$. Знак $\cup$ происходит от первой буквы латинского слова Union (объединение, союз).

Пересечением множеств *A* и *B* называют множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит и множеству A, и множеству B. Пересечение множеств A и B обозначают $A \cap B$.

ПРИМЕР 2. а) Пусть $A = [0; 2]$, $B = [1; 3]$. Тогда $A \cup B = [0; 2] \cup [1; 3] = [0; 3]$, $A \cap B = [0; 2] \cap [1; 3] = [1; 2]$.

б) Пусть $A = [-1; 1]$, $B = (1; 2)$. Тогда $A \cup B = [-1; 1] \cup (1; 2) = [-1; 2)$, $A \cap B = [-1; 1] \cap (1; 2) = \varnothing$.

Если любой элемент множества A является элементом множества B, то A называют **подмножеством** множества B. Пишут $A \subset B$ и говорят «A — подмножество B».

Считают, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называют конечным. Элементы конечного множества, состоящего из n элементов, можно занумеровать: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Если множество A состоит только из одного элемента a, то пишут $A = \{a\}$; если из n элементов, то пишут $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Множество называют бесконечным, если для любого сколь угодно большого натурального числа n в этом множестве найдется n элементов.

Например, множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел 1, 2, 3, 4, ... бесконечно. Множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел тоже бесконечно.

Говорят, что множества A и B имеют равные (одинаковые) **мощности**, если между элементами этих множеств можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Например, между элементами двух множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{1, 4, 9\}$ можно установить взаимно-однозначное соответствие

$$\begin{array}{ccc} 1, & 2, & 3 \\ \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow \\ 1, & 4, & 9. \end{array}$$

Эти множества имеют равные мощности.

Говорят, что мощность множества A меньше мощности множества B, если между элементами этих множеств нельзя установить взаимно-однозначное соответствие, но существует подмножество $B' \subset B$, такое, что между элементами A и B' можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Если A и B — конечные множества и A состоит из n_1 элементов, а B — из n_2 элементов, то мощности A и B равны, если $n_1 = n_2$, и мощность A меньше мощности B, если $n_1 < n_2$.

Мощность конечного множества A меньше мощности бесконечного множества B.

Множество $\boldsymbol{N}$ всех натуральных чисел имеет мощность, одинаковую с множеством всех четных натуральных чисел. Ведь имеет место взаимно-однозначное соответствие

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \dots & n, & \dots \\ \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \dots & \uparrow\downarrow & \\ 2, & 4, & 6, & \dots & 2n, & \dots . \end{array}$$

Получился пример бесконечного множества, имеющего одинаковую мощность со своей частью.

Приведем еще пример. Множество всех натуральных чисел и множество всех целых неотрицательных чисел имеют одинаковую мощность. Взаимно-однозначное соответствие между их элементами можно установить так:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \dots \\ \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \dots . \end{array}$$

Действительные числа обладают следующими свойствами, которые принято располагать по группам.

I. Свойства порядка.

I_1. Для любых двух действительных чисел a и b выполняется и притом только одно из трех соотношений: $a = b$, $a < b$, $a > b$.

I_2. Для любых двух действительных чисел a и b, таких, что $a < b$, найдется такое действительное число c, что $a < c$ и $c < b$, т. е. $a < c < b$.

I_3. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (свойство транзитивности неравенств).

II. Свойства сложения и вычитания.

II_1. $a + b = b + a$ (переместительное свойство сложения).

II_2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (сочетательное свойство сложения).

II_3. $a + 0 = a$.

II_4. $a + (-a) = 0$.

II_5. $a - b = a + (-b)$.

II_6. Если $a < b$, то $a + c < b + c$ для любого действительного числа c.

III. Свойства умножения и деления.

III_1. $a \cdot b = b \cdot a$ (переместительное свойство умножения).

III_2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (сочетательное свойство умножения).

III_3. $a \cdot 1 = a$.

III_4. $a \cdot 0 = 0$.

III_5. $-a = (-1) \cdot a$.

III_6. $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ $(a \neq 0)$.

III_7. $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$.

III_8. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (распределительное свойство).

III_9. Если $a < b$ и c — положительное число, то $a \cdot c < b \cdot c$.

IV. Архимедово свойство.

Для любых чисел a и b таких, что $b > a > 0$ существует натуральное число n такое, что $an > b$.

V. Свойство непрерывности действительных чисел.

Для любой системы отрезков $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, ..., $[a_n; b_n]$, ..., удовлетворяющей условиям:

1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \ldots \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$;

2) $|b_n - a_n| \to 0$ при $n \to \infty$,

существует, и притом единственная, точка, принадлежащая всем отрезкам $[a_n; b_n]$.

Замечание 1. Отметим, что первоначально архимедово свойство было сформулировано для отрезков: отложив достаточное число раз меньший из двух данных отрезков, всегда можно получить отрезок, превосходящий больший из них.

Замечание 2. Отрезки, удовлетворяющие условию 1), называют вложенными отрезками. Поэтому свойство V можно сформулировать следующим образом:

Для любой системы вложенных отрезков $[a_n; b_n]$, длины которых стремятся к нулю при $n \to \infty$, существует, и притом единственная, точка, принадлежащая всем отрезкам $[a_n; b_n]$.

Подчеркнем, что множество рациональных чисел не обладает свойством непрерывности (см. задачу 1.29).

1.21° Как обозначают множества:
а) натуральных чисел; б) целых чисел;
в) рациональных чисел; г) действительных чисел?

1.22 Запишите числовой промежуток с помощью неравенств:
а) $[3; 5]$; б) $(3; 5)$; в) $[3; 5)$;
г) $(3; 5]$; д) $[3; +\infty)$; е) $(3; +\infty)$;
ж) $(-\infty; 5)$; з) $(-\infty; 5]$.
Изобразите каждый из них на координатной оси.

1.23 С помощью знаков $\in$ и $\notin$ запишите, какое из данных чисел принадлежит данному числовому промежутку, а какое нет:
а) $2, -3, 0, [-2; 2)$; б) $-5, 7, 2, (-5; 2)$;
в) $-6, 0, 6, (-\infty; 5)$; г) $-5, 100, 0, [0; +\infty)$.

1.24 Изобразите на координатной оси числовые промежутки A и B, найдите их объединение и пересечение, если:
а) $A = [-3; 4]$, $B = [0; 7)$; б) $A = (-\infty; 0)$, $B = (-3; 7]$;
в) $A = (-\infty; 2]$, $B = [2; 5)$; г) $A = (-7; 2)$, $B = [0; 7)$;
д) $A = [-2; 0)$, $B = (0; 2]$; е) $A = (-5; 0]$, $B = (-1; 3]$.

1.25* Докажите, что:
а) если $a - b > 0$, то $a > b$; б) если $a - b < 0$, то $a < b$;
в) если $0 < a < b$, то $a^2 < b^2$; г) если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$;
д) если $a < b < 0$, то $a^2 > b^2$; е) если $a < b$, то $a^3 < b^3$;
ж) если $0 < a < b < c$, то $ab < c^2$;
з) если $a > 0$, $b > 0$ и $a^2 < b^2$, то $a < b$.

1.26 Укажите на координатной оси все числа x, для каждого из которых верно неравенство:
а) $|x| \leqslant 3$; б) $|x| \geqslant 4$; в) $|2x| > 5$;
г) $|3x| < 7$; д) $|x - 3| \geqslant 2$; е) $|x + 3| \leqslant 5$;
ж) $|2x - 3| > 5$; з) $|3x + 4| < 7$; и) $|5x - 4| \leqslant 6$.
Задайте множество решений неравенства в виде промежутка или объединения промежутков.

1.27 Задайте с помощью знака модуля множество точек координатной оси:
а) $(-2; 2)$; б) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; в) $[-5; 5]$;
г) $[-2; 4]$; д) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; е) $(-10; 2)$.

1.28* а) Установите взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{Q}$.
б) Покажите, что между множествами всех точек прямой и всех точек интервала $(0; 1)$ можно установить взаимно-однозначное соответствие.

1.29* Докажите, что отрезки $\left[\sqrt{2} - \frac{1}{n};\ \sqrt{2} + \frac{1}{n}\right]$ ($n \in N$, $n \to +\infty$) вложенные. Имеют ли они общую точку? Если да, то какому числу она соответствует — рациональному или иррациональному?

1.3*. Метод математической индукции

Доказательство справедливости утверждений, зависящих от натурального числа n, обычно проводят с помощью **принципа математической индукции:**

Если свойство, зависящее от натурального числа n, во-первых, верно при $n = 1$ и, во-вторых, из предположения, что оно верно для $n = k$, следует, что оно верно при $n = k + 1$, то считают, что это свойство верно для любого натурального числа n.

Доказательство, основанное на принципе математической индукции, называют **доказательством по индукции** или **доказательством методом математической индукции.**

ПРИМЕР 1. Пусть надо доказать, что если $a > 0$, то для любого натурального числа n

$$a^n > 0. \tag{1}$$

Согласно принципу математической индукции, для того чтобы считать верным неравенство (1) для всех натуральных n, достаточно проверить выполнение двух утверждений:

1) неравенство (1) справедливо для $n = 1$;

2) если предположить, что для некоторого $n = k$ неравенство (1) справедливо, т. е. что имеет место неравенство $a^k > 0$, то оно справедливо и для $n = k + 1$, т. е. имеет место неравенство $a^{k+1} > 0$.

Утверждение 1 выполняется, потому что, положив в неравенстве (1) $n = 1$, получим неравенство $a > 0$, верное по условию.

Утверждение 2 тоже выполняется, ведь если предположить верным неравенство $a^k > 0$, то после умножения его на положительное число a получим по свойству III_9 (п. 1.2) верное неравенство $a^{k+1} > 0$.

Таким образом, утверждения 1 и 2 выполняются. Но тогда согласно принципу математической индукции неравенство (1) верно для любого натурального числа n.

ПРИМЕР 2. Докажем, что для любого натурального числа n сумма n первых нечетных натуральных чисел равна n^2:

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \tag{2}$$

При $n = 1$ равенство (2) верно: $1 = 1^2$.

Предположим, что равенство (2) верно при некотором $n = k$, т. е. что верно равенство

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2.$$

Докажем, что равенство (2) верно при $n = k + 1$, т. е. что

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Пользуясь нашим предположением, заменим сумму первых k слагаемых на k^2:

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Тем самым доказано, что если равенство (2) верно при $n = k$, то оно верно и при $n = k + 1$.

Тогда согласно принципу математической индукции равенство (2) верно для любого натурального числа n.

ПРИМЕР 3. Докажем, что для любого числа $b \geqslant -1$ и любого натурального числа n справедливо неравенство

$$(1 + b)^n \geqslant 1 + nb. \qquad (3)$$

Действительно, так как $(1 + b)^1 = 1 + b$, то при $n = 1$ неравенство (3) выполняется.

Предположим, что неравенство (3) выполняется при $n = k$, т. е. что верно неравенство

$$(1 + b)^k \geqslant 1 + kb.$$

Так как $1 + b \geqslant 0$, то

$$(1 + b)^{k+1} = (1 + b)^k \cdot (1 + b) \geqslant (1 + kb) \cdot (1 + b) =$$
$$= 1 + (k + 1)\, b + kb^2 \geqslant 1 + (k + 1)\, b,$$

т. е. мы доказали неравенство (3) для $n = k + 1$.

Но тогда согласно принципу математической индукции неравенство (3) верно при любом натуральном n.

Заметим, что не только доказательство приведенного в примере 1 свойства, но и определение n-й степени, строго говоря, надо давать по индукции.

Например, говорят, что a^n для натурального n есть число, которое определяется следующим образом:

$$a^1 = a \text{ и } a^{k+1} = a^k \cdot a \qquad (4)$$

для любого натурального k.

Пользуясь этим определением, получим, например, что

$$a^5 = a^4 \cdot a = a^3 \cdot a \cdot a = a^2 \cdot a \cdot a \cdot a = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a.$$

ПРИМЕР 4. Докажем, что для любого действительного числа a и любых натуральных чисел m и n справедливо равенство

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \quad (5)$$

Зададим произвольное натуральное число m и будем, как говорят, вести индукцию по n.

При $n = 1$ равенство (5) верно по определению степени с натуральным показателем (см. (4)):

$$a^m \cdot a^1 = a^{m+1}.$$

Пусть теперь равенство (5) верно при $n = k$:

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k}. \quad (6)$$

Тогда, применяя равенство (6), по определению степени (см. (4)) имеем

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot a^k \cdot a^1 = a^{m+k} \cdot a^1 = a^{m+k+1},$$

т. е.

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+k+1},$$

и мы доказали равенство (5) для $n = k + 1$.

Но тогда согласно принципу математической индукции равенство (5) верно для любого натурального n при произвольно выбранном m, т. е. равенство (5) верно для любых натуральных m и n.

Замечание. Отметим, что оба шага в доказательстве методом математической индукции очень важны, ни один из них нельзя пропускать.

Покажем, к чему приведет пропуск первого шага в доказательстве методом математической индукции. Рассмотрим «доказательство» заведомо неверного утверждения:

При любом натуральном n справедливо неравенство

$$2^{n+1} < 2^n. \quad (7)$$

Сразу предположим, что неравенство (7) справедливо при $n = k$. Умножая его на положительное число 2, получим, что оно верно и для $n = k + 1$.

Отсюда еще нельзя сделать вывод, что неравенство (7) справедливо для всех натуральных n, так как пропущенный первый шаг в доказательстве по индукции показал бы, что неравенство (7) неверно.

Но и одного первого шага в доказательстве по индукции недостаточно. Даже проверка справедливости утверждения для нескольких первых натуральных значений n еще не означает, что и для всех следующих значений n оно верно.

Например, если в формулу $p = n^2 - n + 41$ вместо n подставлять числа 1, 2, 3, 4, 5, ..., то получаются простые числа:

при $n = 1$ $\quad p = 1^2 - 1 + 41 = 41,$
при $n = 2$ $\quad p = 2^2 - 2 + 41 = 43,$
при $n = 3$ $\quad p = 3^2 - 3 + 41 = 47, \ldots .$

Если, пропустив второй шаг в доказательстве методом математической индукции, утверждать, что эта формула при любом натуральном n дает простое число, то получим неверное утверждение.

Действительно, подставляя в формулу $p = n^2 - n + 41$ натуральные числа от 1 до 40, мы получим простые числа, но при $n = 41$ имеем $p = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ — составное число.

Заметим, что некоторые утверждения справедливы не для всех $n \in \boldsymbol{N}$, а лишь для всех натуральных чисел, начиная с некоторого натурального $n_0 > 1$. В таких случаях надо проверить сначала справедливость утверждения для $n = n_0$, а потом, что из справедливости утверждения для $n = k$ (где $k \geqslant n_0$) следует справедливость утверждения для $n = k + 1$; и тогда это утверждение будет верно для любого натурального $n \geqslant n_0$.

Например, докажем, что $2^n > 2n + 1$ для любого натурального $n \geqslant 3$.

Если $n_0 = 3$, то $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$.

Предположим, что для $n = k$ $(k \geqslant 3)$ справедливо неравенство

$$2^k > 2k + 1 \qquad (8)$$

и докажем, что тогда для $n = k + 1$ справедливо неравенство

$$2^{k+1} > 2k + 3.$$

Используя неравенство (8) и условие $k \geqslant 3$, имеем:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot (2k + 1) = 4k + 2 =$$
$$= 2k + 3 + (2k - 1) > 2k + 3.$$

Следовательно, неравенство $2^n > 2n + 1$ справедливо для любого натурального числа $n \geqslant 3$.

1.30° а) Сформулируйте принцип математической индукции.

б) Справедливо ли утверждение для всех натуральных n, если верно только одно из двух условий принципа математической индукции?

1.31 Докажите методом математической индукции, что:

а) $0^n = 0$ для любого натурального n;

б) если $0 \leqslant a < b$, то $a^n < b^n$ для любого натурального n;

в) $a^n b^n = (ab)^n$ для любого натурального n;

г) $(a^n)^m = a^{nm}$ для любых натуральных m и n.

1.32 Докажите методом математической индукции, что:

а) общий член арифметической прогрессии $\{a_n\}$ вычисляется по формуле $a_n = a_1 + (n - 1)\,d$;

б) общий член геометрической прогрессии $\{b_n\}$ вычисляется по формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$;

в) сумма первых n членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ вычисляется по формуле $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$;

г) сумма первых n членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$ $(q \neq 1)$ вычисляется по формуле $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$.

1.33 Верно ли, что для любого натурального n справедливо неравенство $2^{n+1} < 2^n + 2^{n-1}$?

1.34 Пусть $a < 0$. Докажите по индукции, что:
а) $a^n > 0$ при любом четном натуральном n;
б) $a^n < 0$ при любом нечетном натуральном n.

1.35 Докажите по индукции, что для любого натурального n выполняется равенство:

а) $1 + 2 + 3 + .. + n = \frac{(n+1)n}{2}$;

б) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$;

в) $3 + 12 + \ldots + 3 \cdot 4^{n-1} = 4^n - 1$;

г) $4 + 0 + \ldots + 4 \cdot (2 - n) = 2n(3 - n)$;

д) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

е) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

ж) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$;

з) $\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(n+3) \cdot (n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}$;

и) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$.

Указание. Пусть $A(n)$ и $B(n)$ — некоторые выражения. Доказать равенство $A(n) = B(n)$ для любого натурального n по индукции можно так:
1) Убедиться, что равенство $A(1) = B(1)$ выполняется.
2) Доказать равенство

$$A(k+1) - A(k) = B(k+1) - B(k). \qquad (9)$$

3) Теперь из предположения $A(k) = B(k)$ и из равенства (9) следует, что $A(k+1) = B(k+1)$.
Тогда согласно принципу математической индукции доказываемое равенство верно для любого натурального n.

1.36 Докажите по индукции, что для любого натурального n выполняется неравенство:

а) $2 + 4 + \ldots + 2n < (n+1)^2$;

б) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1} > \frac{1}{2n}$;

в) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$;

г) $4^n > 7n - 5$.

1.37 Докажите по индукции, что:

а) $1 + 2 + \ldots + n < n^2,\ n \in \boldsymbol{N},\ n \geqslant 2$;

б) $2^n > 5n + 1,\ n \in \boldsymbol{N},\ n \geqslant 5$;

в) $2^n > n^2,\ n \in \boldsymbol{N},\ n \geqslant 4$;

г) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \geqslant 2^{n-1},\ n \in \boldsymbol{N},\ n \geqslant 3$.

д) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},\ n \in \boldsymbol{N},\ n \geqslant 2$.

1.38 Докажите по индукции, что для любого натурального n справедливо неравенство:

а) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} < \frac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} < \frac{1}{3}$;

в) $\frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 22} + \ldots + \frac{1}{(7n-6)(7n+1)} < \frac{1}{7}$;

г) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$.

1.39 Докажите, что для любого натурального n выполняется равенство:

а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1.40 **Задача ал-Караджи (Иран, XI в.).** Докажите, что для любого натурального n верно равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

1.41 **Задача ал-Каши (XIV—XV вв.).** Докажите, что для любого натурального n верно равенство

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n).$$

1.42 **Задача Фаульхабера (Германия, 1580—1635).** Докажите, что для любого натурального n верно равенство

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = \frac{1}{12}(2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2).$$

1.43 Докажите, что для любого натурального n:

а) $5^n + 3$ делится на 4;
б) $7^n + 5$ делится на 6;
в) $5^n + 6^n - 1$ делится на 10;
г) $3^n + 4^n - 1$ делится на 6;
д) $9^{n+1} - 8n - 9$ делится на 64;
е) $7^{n+1} - 6n - 7$ делится на 36.

1.44 Докажите, что:
а) $7^n + 9$ делится на 8 для любого нечетного натурального n;
б) $3^n + 7$ делится на 8 для любого четного натурального n.

1.45 На один из трех штырьков насажены n различных колец так, что большее кольцо лежит ниже меньшего (на рисунке 8 $n = 3$). За один ход разрешается перенести одно кольцо с одного штырька на другой, при этом не разрешается большее кольцо класть на меньшее. Докажите, что наименьшее число ходов, за которое можно перенести все кольца с одного штырька на другой, равно $2^n - 1$.

Рис. 8

1.4. Перестановки

Произведение n натуральных чисел от 1 до n обозначают $n!$ (читают: **«n факториал»**):

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

Например, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Условились считать, что $1! = 1$ и $0! = 1$.

Два элемента (две вещи, две буквы) x_1 и x_2 можно расположить (записать) двумя способами:

$$x_1,\ x_2, \qquad (1)$$
$$x_2,\ x_1. \qquad (2)$$

Будем говорить, что расположения (1) и (2) являются различными **перестановками из двух элементов** (x_1 и x_2). Таким образом, из двух элементов можно составить только две различные перестановки.

Из трех элементов x_1, x_2, x_3 можно составить только шесть перестановок:

$$x_1, x_2, x_3, \quad x_2, x_1, x_3, \quad x_3, x_1, x_2,$$
$$x_1, x_3, x_2, \quad x_2, x_3, x_1, \quad x_3, x_2, x_1.$$

На первом месте мы поставили букву x_1 и к ней приписали две перестановки из остальных букв x_2 и x_3. Потом на первом месте мы поставили букву x_2 и к ней приписали две перестановки из остальных букв x_1 и x_3. Наконец, на первом месте мы поставили букву x_3 и к ней приписали две перестановки из остальных букв x_2 и x_1. Всего получилось $3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ перестановок. Других перестановок нет.

Рассмотрим теперь n элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Они расположены в порядке возрастания номеров и образуют определенную перестановку.

При другом расположении, например когда номера убывают: $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ ($n \geqslant 2$), они образуют другую перестановку.

Перестановка из n элементов — это расположение их в определенном порядке. Таким образом, различные перестановки из n элементов соответствуют различным расположениям (в том или ином порядке) этих n элементов. Количество перестановок из n элементов обозначают P_n (от фр. Permutation — перестановка) и читают: «пэ из эн».

Для любого натурального числа n справедлива формула

$$\boldsymbol{P_n = n!} \qquad (3)$$

Для $n = 1$ эта формула очевидно верна, для $n = 2, 3$ формула (3) уже проверена. Докажем справедливость формулы (3) для всех натуральных n методом математической индукции.

Для $n = 1$ эта формула справедлива: $P_1 = 1! = 1$ (из одного элемента можно составить только одну перестановку).

Предположим, что для $n = k$ формула (3) справедлива, т. е.

$$P_k = k!$$

Докажем, что тогда для $n = k + 1$ формула (3) тоже справедлива, т. е.

$$P_{k+1} = (k+1)!$$

Чтобы получить всевозможные перестановки из $(k + 1)$ элементов: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k+1}$, на первое место поставим какой-нибудь элемент x_j ($j = 1, 2, 3, \ldots, k + 1$), а за ним остальные k элементов, расположенные всеми возможными способами. Количество таких расположений (перестановок из k элементов), по нашему предположению, равно $P_k = k!$ Так как число элементов x_j равно $(k + 1)$, то количество перестановок из $(k + 1)$ элементов равно

$$P_{k+1} = (k+1) \cdot k! = (k+1)!$$

Тем самым на основании принципа математической индукции доказана справедливость формулы (3) для всех натуральных n.

1.46 Вычислите:

а) $5!$; б) $6!$; в) $\frac{7!}{5!}$; г) $\frac{2000!}{1999!}$; д) $\frac{15!}{10! \cdot 5!}$; е) $\frac{12! \cdot 6!}{16!}$;

ж) $\frac{5! + 6! + 7!}{8! - 7!}$; з) $\frac{18! - 17 \cdot 17! - 16 \cdot 16!}{17! - 16!}$.

1.47 Докажите, что для любого натурального n верно равенство:

а) $n! + (n+1)! = n!\,(n+2)$;

б) $(n+1)! - n! = n!\,n$;

в) $(n-1)! + n! + (n+1)! = (n+1)^2\,(n-1)!$;

г) $(n+1)! - n! + (n-1)! = (n^2+1)\,(n-1)!$;

д) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = n^2 + n$; е) $\dfrac{(n-1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1.48 Запишите в виде дроби:

а) $\dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{n^2+5n}{(n+3)!}$; б) $\dfrac{n+2}{n!} - \dfrac{3n+2}{(n+1)!}$;

в) $\dfrac{1}{(k-1)!} - \dfrac{k}{(k+1)!}$; г) $\dfrac{1}{(k-2)!} - \dfrac{k^3+k}{(k+1)!}$.

1.49° Что называют перестановкой из n элементов?

1.50 Выпишите все перестановки из чисел 4, 5, 6. Чему равно P_3?

1.51 Выпишите все перестановки из элементов x_1, x_2, x_3, x_4. Чему равно P_4?

1.52 Верно ли, что:

а) $P_5 = 5 \cdot P_4$; б) $P_6 = 6 \cdot P_5$;

в) $P_{100} = 100 \cdot P_{99}$; г) $P_n = n \cdot P_{n-1}$?

1.53 Вычислите:

а) $P_{10} : P_9$; б) $P_{12} : P_{10}$.

1.54 Множество, состоящее из шести элементов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, упорядочили всеми возможными способами. Сколько таких способов? В скольких случаях:

а) элемент x_1 будет первым по порядку;

б) элемент x_1 не будет ни первым, ни последним;

в) элемент x_1 будет первым, а элемент x_6 будет последним;

г) элемент x_1 будет первым, а элемент x_6 не будет последним;

д) элемент x_1 будет стоять рядом с элементом x_6;

е) элемент x_1 не будет стоять рядом с элементом x_6;

ж) элемент x_1 будет стоять перед элементом x_6?

1.55* Сколькими различными способами можно усадить в ряд трех мальчиков и трех девочек так, чтобы никакие два мальчика и никакие две девочки не оказались рядом?

1.56* **Задача-шутка.** Как-то раз в воскресенье семеро друзей зашли в кафе, уселись за один столик и заказали мороженое. Хозяин кафе сказал, что если друзья в каждое следующее воскресенье будут садиться по-новому и перепробуют все способы посадки, то с этого момента он обещает кормить их мороженым бесплатно. Удастся ли друзьям воспользоваться предложением хозяина кафе?

1.5. Размещения

Пусть даны три элемента

$$x_1,\ x_2,\ x_3. \qquad (1)$$

Рассмотрим все возможные пары элементов, составленные из них:

$$\begin{array}{ll} x_1,\ x_2; & x_1,\ x_3; \\ x_2,\ x_1; & x_2,\ x_3; \\ x_3,\ x_1; & x_3,\ x_2. \end{array} \qquad (2)$$

Других пар нет. Очевидно, что любая из этих пар отличается от других либо хотя бы одним элементом, либо порядком следования входящих в них элементов. Говорят, что каждая такая пара есть упорядоченная пара, т. е. упорядоченный набор из двух элементов, составленный из трех данных элементов (1).

Пусть заданы n элементов

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n. \qquad (3)$$

Из них при $k \leqslant n$ можно составить наборы из k элементов, отличающихся друг от друга либо хотя бы одним элементом, либо порядком следования входящих в них элементов. Говорят, что каждый такой набор есть упорядоченный набор из k элементов, составленный из n данных элементов (3).

Размещением из n элементов x_1, x_2, x_3, ..., x_n по k называют любой упорядоченный набор из k элементов, составленный из данных n элементов.

Количество размещений из n элементов по k обозначают через A_n^k (от фр. Arangement — размещение) и читают: «а из эн по ка».

Очевидно, что $A_n^1 = n$, так как из n элементов выбрать один элемент можно n способами.

Найдем A_n^2 — число размещений из n элементов по два. Выбрать первый элемент можно n способами, для каждого из них выбрать еще один элемент из оставшихся $(n - 1)$ элементов можно $(n - 1)$ способами. Тогда из n элементов можно составить $n(n - 1)$ упорядоченных пар элементов, т. е.

$$A_n^2 = n(n - 1). \qquad (4)$$

Выше выписаны все 6 размещений из трех элементов x_1, x_2, x_3 по два (см. (2)). Тот же результат получим по формуле (4): $A_3^2 = 3 \cdot 2$. Других размещений нет.

Вычислим A_n^3. Как мы уже знаем, выбрать два элемента из n можно $A_n^2 = n(n - 1)$ способами. Присоединить к каждой выбранной паре элементов еще один элемент из оставшихся $(n - 2)$ элементов можно $(n - 2)$ способами, т. е. $A_n^3 = A_n^2 \cdot (n - 2) = n(n - 1)(n - 2)$.

Аналогично $A_n^4 = A_n^3 \cdot (n - 3) = n(n - 1)(n - 2)(n - 3)$.

Для любого натурального числа $k \leqslant n$ справедлива формула

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1). \qquad (5)$$

Докажем формулу (5) методом математической индукции. Заметим, что если $k \geqslant 2$, то в правой части равенства (5) имеется k множителей, если $k = 1$, то $A_n^1 = n$.

Будем вести индукцию по k.

При $k = 1$ равенство (5) справедливо, так как $A_n^1 = n$.

Предположим, что для $k = i$ равенство (5) справедливо, т. е. что

$$A_n^i = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-i+1).$$

Докажем, что для $k = i+1$ равенство (5) также справедливо, т. е. что

$$A_n^{i+1} = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(i+1)+1) = \\ = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-i).$$

По нашему предположению, выбрать группу из n элементов по i можно $A_n^i = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)$ способами. Присоединить к каждой выбранной группе из i элементов еще один элемент из оставшихся $(n-i)$ элементов можно $(n-i)$ способами, т. е. действительно

$$A_n^{i+1} = A_n^i\cdot(n-i) = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)(n-i).$$

Поэтому согласно принципу математической индукции для любого $k \leqslant n$ справедливо равенство (5), что и требовалось доказать.

Заметим, что любое размещение из n элементов по n — это одна из перестановок из n элементов, поэтому $A_n^n = P_n$, т. е.

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1 = n!$$

ПРИМЕР. Сколькими способами можно распределить два билета на разные кинофильмы между семью друзьями?

Число способов, которыми можно распределить два билета на разные кинофильмы между семью друзьями, равно $A_7^2 = 7\cdot(7-1) = 42$.

Чтобы в этом убедиться, выпишем все возможные размещения в виде двузначных чисел, первая цифра которых показывает, какому другу достался первый билет, вторая — какому второй:

12, 13, 14, 15, 16, 17,
21, 23, 24, 25, 26, 27,
. . . .
71, 72, 73, 74, 75, 76.

В каждой из семи строк по 6 размещений — всего $7\cdot6 = 42$ размещения, т. е. число способов распределения двух билетов в данной задаче равно 42.

1.57 Выпишите все размещения из четырех элементов x_1, x_2, x_3, x_4 по два. Чему равно A_4^2?

1.58 Вычислите:

а) A_4^3; б) A_5^2; в) A_5^3; г) A_7^4; д) A_7^5; е) A_8^1.

Докажите, что $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

1.59 Вычислите:

а) $\dfrac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{A_{10}^3}$; б) $\dfrac{A_{15}^4 + A_{14}^5}{A_{15}^3}$; в) $\dfrac{A_{13}^3}{A_{15}^3 - A_{14}^3}$;

г) $\dfrac{A_{13}^3}{A_{14}^4 - A_{13}^4}$; д) $\dfrac{A_{12}^4 \cdot 7!}{A_{11}^9}$; е) $\dfrac{A_{15}^{12}}{A_{16}^3 \cdot 12!}$.

1.60 Сколькими различными способами можно распределить между шестью лицами: а) две; б) три; в) четыре разные путевки в санатории?

1.61 Найдите натуральное число x, для которого выполняется равенство:

а) $A_x^2 = 72$; б) $A_{x-1}^2 = 110$;

в) $A_{x+1}^2 = 90$; г) $A_x^3 - A_x^2 = 0$;

д) $A_{x+1}^3 - A_{x-1}^3 = 96$; е) $A_{x+1}^4 + A_x^4 = 144$.

1.6. Сочетания

Сочетанием из данных n элементов по k называют любую группу из k этих элементов ($1 \leqslant k \leqslant n$).

Например, из трех элементов x_1, x_2, x_3 можно составить следующие сочетания по два элемента:

$$x_1,\ x_2;\quad x_1,\ x_3;\quad x_2,\ x_3.$$

Других сочетаний из рассматриваемых трех элементов по 2 нет. Приведем сочетания из четырех элементов x_1, x_2, x_3, x_4 по 3:

$$x_1,\ x_2,\ x_3;\qquad x_1,\ x_2,\ x_4;$$
$$x_1,\ x_3,\ x_4;\qquad x_2,\ x_3,\ x_4.$$

Подчеркнем, что понятие сочетания не связано с расположением (порядком) элементов. Если в данном сочетании переставить каким-либо образом его элементы, то оно (как сочетание) не изменится.

Число сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k (от фр. Combination — сочетание) и читают: «цэ из эн по ка».

Для любого натурального $k \leqslant n$ справедлива формула

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}}. \quad (1)$$

Вычисляя число размещений, мы получили пары, отличающиеся порядком элементов, например x_1x_2 и x_2x_1. Из двух элементов можно составить две перестановки, т. е. P_2 упорядоченных пар, поэтому $A_n^2 = P_2 \cdot C_n^2$, так как число размещений A_n^2 равно количеству групп — C_n^2, умноженному на число перестановок внутри группы — P_2.

Для любого $k \leqslant n$ количество размещений из n элементов по k можно вычислить по формуле

$$A_n^k = P_k \cdot C_n^k. \quad (2)$$

Действительно, из n элементов можно составить C_n^k групп по k элементов, а в каждой группе можно выполнить P_k перестановок. Таким образом, число всех размещений A_n^k равно произведению числа групп C_n^k и числа перестановок внутри этих групп P_k, т. е. справедлива формула (2). Следовательно,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!},$$

что и требовалось доказать.

ПРИМЕР. Сколькими различными способами из семи участников математического кружка можно составить команду из двух человек для участия в олимпиаде?

Так как порядок, в котором будут выбраны два человека, безразличен, то число равновозможных случаев составить команду равно $C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21$.

Справедливы формулы

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{C_n^k = C_n^{n-k}}, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}}. \quad (5)$$

Докажем их.

В самом деле,

$$C_n^k = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = C_n^{n-k},$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)} =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{k!\,(k+1)(n-k-1)!\,(n-k)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1},$$

что и требовалось доказать. ●

Замечание. Выше числа C_n^k определялись для $k \geqslant 1$. Иногда удобно рассматривать число C_n^0, по определению равное 1:

$$C_n^0 = 1.$$

При $k = 0$ формула (1) не имеет смысла, но формула (3) имеет смысл. В самом деле, так как считается, что $0! = 1$, то

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$$

Но тогда при $k = 0$ имеют смысл также и формулы (4) и (5):

$$C_n^n = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1 = C_n^0,$$

$$C_n^0 + C_n^{0+1} = 1 + n = C_{n+1}^1.$$

Поэтому в дальнейшем при использовании чисел C_n^k будем пользоваться формулой (3), считая, что $0 \leqslant k \leqslant n$.

1.62 Выпишите все сочетания из пяти элементов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 по два. Чему равно C_5^2?

1.63 Вычислите:
а) C_4^3; б) C_5^4; в) C_5^3; г) C_7^4; д) C_7^5; е) C_8^6.

1.64 Используя равенство $C_n^k = C_n^{n-k}$, вычислите:
а) C_{10}^9; б) C_{10}^8; в) C_{12}^{10}; г) C_{12}^{11}; д) C_{200}^{199}; е) C_{2000}^{1999}.

1.65 Сколькими способами можно распределить две одинаковые путевки между пятью лицами?

1.66 Сколькими способами можно присудить шести лицам три одинаковые премии?

1.67 В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно:
а) назначить двух дежурных;
б) выбрать 28 человек для участия в осеннем кроссе?

1.68 Вычислите:

а) $C_{10}^3 + C_9^3$; б) $C_{11}^2 + C_9^3$; в) $C_{15}^{11} - C_{16}^{14}$;

г) $\dfrac{C_7^4 + C_7^3}{C_7^4}$; д) $\dfrac{C_{12}^4 - C_{12}^8}{C_{13}^7}$; е) $\dfrac{C_{11}^5 + C_{11}^6}{C_{13}^7 + C_{13}^6}$.

1.69 Вычислите $\dfrac{C_{16}^3 + C_{15}^2 + C_{14}^1}{C_{16}^4 + C_{15}^3 + C_{14}^2}$.

1.70 Докажите равенство:

а) $C_7^4 + 2C_6^3 + C_7^3 = 2C_{11}^2$; б) $C_9^5 - 2C_8^5 + C_9^4 = 2C_8^4$;

в) $C_{12}^4 + 2C_{12}^5 + C_{12}^6 = C_{14}^6$; г) $C_{15}^8 + 2C_{15}^9 + C_{15}^{10} = C_{17}^{10}$.

1.71 При встрече n друзей обменялись рукопожатиями. Определите число рукопожатий.

1.72 В турнире по шахматам каждый участник сыграл с каждым по одной партии, всего было сыграно 36 партий. Определите число участников турнира.

1.73 В классе имеется шесть сильных математиков. Сколькими способами из них можно составить команду на районную олимпиаду по математике, если от класса можно послать команду:

а) из четырех человек; б) от двух до четырех человек?

1.74 Найдите число всех подмножеств данного множества, содержащего n элементов (n — любое натуральное число).

1.7*. Доказательство числовых неравенств

При доказательстве числовых неравенств используются следующие утверждения, которые являются основными свойствами действительных чисел (см. п. 1.2) или их следствиями:

1. Для любых действительных чисел a, b и c из справедливости неравенств $a < b$ и $b < c$ следует справедливость неравенства $a < c$ (свойство транзитивности неравенств).

2. Для любых действительных чисел a, b, c и d из справедливости неравенства $a < b$ и $c < d$ следует справедливость неравенства $a + c < b + d$ (одноименные числовые неравенства можно почленно складывать).

3. Для любых положительных чисел a, b, c и d из справедливости неравенств $a < b$ и $c < d$ следует справедливость неравенства $ac < bd$ (одноименные числовые неравенства с положительными членами можно почленно перемножать).

4. Для любых действительных чисел a, b и c из справедливости неравенства $a < b$ следует справедливость неравенства $a + c < b + c$ (к обеим частям неравенства можно прибавить любое число).

5. Для любых действительных чисел a, b и любого положительного числа c из справедливости неравенства $a < b$ следует справедливость неравенства $ac < bc$ (неравенство можно умножить или разделить на любое положительное число).

Отметим, что утверждения 1—5 остаются справедливыми, если в них знаки строгих неравенств заменить на знаки нестрогих неравенств.

Рассмотрим примеры доказательства неравенств с помощью свойств неравенств 1—5.

ПРИМЕР 1. Докажем, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \qquad (1)$$

Так как $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ — действительные числа для любых положительных чисел a и b, то неравенство

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0 \qquad (2)$$

справедливо для любых положительных чисел a и b (квадрат действительного числа неотрицателен).

Применяя формулу квадрата разности и учитывая, что для любых положительных чисел a и b верны равенства

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \text{ и } \left(\sqrt{b}\right)^2 = b,$$

перепишем неравенство (2) в виде

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0. \qquad (3)$$

На основании утверждения 4 из справедливости неравенства (3) следует справедливость неравенства

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}. \qquad (4)$$

На основании утверждения 5 из справедливости неравенства (4) следует справедливость неравенства (1), что и требовалось доказать.

Отметим, что левую часть неравенства (1) называют **средним арифметическим чисел a и b**, а правую часть — **средним геометрическим чисел a и b**. Поэтому **свойство**, выраженное неравенством (1), формулируют так:

Среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.

ПРИМЕР 2. Докажем, что для любых положительных чисел x справедливо неравенство

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2. \qquad (5)$$

Рассмотрим неравенство

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\geqslant 1, \qquad (6)$$

в левой части которого записано среднее арифметическое положительных чисел x и $\frac{1}{x}$, а в правой — их среднее геометрическое. Следовательно, неравенство (6) справедливо на основании неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

Но тогда на основании утверждения 5 справедливо неравенство (5), что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 3. Докажем, что для любых положительных чисел a, b и c справедливо неравенство

$$(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant 8abc. \qquad (7)$$

Из справедливости неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического двух положительных чисел следует справедливость неравенств

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab},$$
$$a+c\geqslant 2\sqrt{ac},$$
$$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}.$$

Перемножая почленно эти неравенства, на основании утверждения 3 получим, что справедливо неравенство (7), что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 4. Докажем, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$4(a^3+b^3)\geqslant(a+b)^3. \qquad (8)$$

Рассмотрим выражение $A=4(a^3+b^3)-(a+b)^3$. Сначала преобразуем его:

$$A=4(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)(a^2+2ab+b^2)=$$
$$=(a+b)(4a^2-4ab+4b^2-a^2-2ab-b^2)=$$
$$=(a+b)(3a^2-6ab+3b^2)=3(a+b)(a-b)^2.$$

Так как $a>0$ и $b>0$, то $A\geqslant 0$, т. е. доказана справедливость неравенства

$$4(a^3+b^3)-(a+b)^3\geqslant 0. \qquad (9)$$

По утверждению 4 из справедливости неравенства (9) следует справедливость неравенства (8), что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 5. Докажем, что для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\frac{2}{(2n+1)^2} < \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}. \qquad (10)$$

Левую часть неравенства (10) можно записать в виде $\frac{2}{4n^2+4n+1}$, а правую — в виде $\frac{2}{4n^2+4n}$.

Так как $4n^2 + 4n + 1 > 4n^2 + 4n > 0$ для любого натурального числа n, то по утверждению 5

$$\frac{2}{4n^2+4n+1} < \frac{2}{4n^2+4n}$$

и неравенство (10) доказано.

ПРИМЕР 6. Докажем, что для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}. \qquad (11)$$

Применяя неравенство (10) и утверждение 2, получаем, что

$$2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2}\right) < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}. \qquad (12)$$

Но правая часть этого неравенства меньше $\frac{1}{2}$, поэтому

$$2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2}\right) < \frac{1}{2}.$$

Деля обе части этого неравенства на 2, получим неравенство (11). Справедливость неравенства (11) доказана.

Отметим, что, строго говоря, доказательство неравенства (12) надо проводить методом математической индукции.

ПРИМЕР 7. Пусть a и b — любые действительные числа, такие, что $a + b = 2$. Докажем, что справедливо неравенство

$$a^4 + b^4 \geqslant 2. \qquad (13)$$

Обозначим $a = 1 + c$, тогда $b = 1 - c$, где c — некоторое действительное число, и

$$a^4 + b^4 = (1+c)^4 + (1-c)^4 = 2 + 12c^2 + 2c^4. \qquad (14)$$

Так как $2 + 12c^2 + 2c^4 \geqslant 2$ для любого действительного числа c, то из справедливости равенства (14) следует справедливость неравенства (13), что и требовалось доказать.

1.75° Сформулируйте свойства числовых неравенств.

1.76 Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c, x справедливы неравенства:

а) $\frac{x^2+1}{2} \geqslant x$;

б) $\frac{x^2+9}{6} \geqslant x$;

в) $x^4 + x^2 + 2 > 0$;

г) $x^4 - 4x^2 + 5 > 0$;

д) $4c^2 + 1 \geqslant 4c$;

е) $(a + b)^2 \geqslant 4ab$;

ж) $\frac{2a}{a^2+1} \leqslant 1$;

з) $2a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2a(b + c)$;

и) $(a^2 - b^2)^2 \geqslant 4ab(a - b)^2$;

к) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$.

1.77 Для любых действительных чисел a, b, c, x докажите, что:

а) если $a + b \geqslant 0$, то $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$;

б) если $a > 0$, то $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$;

в) если $a \neq 0$, то $a^2 + \frac{1}{a^2} \geqslant 2$;

г) если $ab > 0$, то $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$;

д) если $a > 0$, $b > 0$, то $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b}$;

е) если $ab > 0$, то $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4$;

ж) если $a > 0$, то $(1 + a)\left(1 + \frac{1}{a}\right) \geqslant 4$;

з) если $a + b \geqslant 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$;

и) если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geqslant a + b + c$;

к) если $0 < a < b$, то $a^3 < b^3$.

1.78 Докажите, что сумма кубов катетов прямоугольного треугольника меньше куба гипотенузы.

1.79* Докажите, что:

а) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{79}{80} < \frac{1}{9}$;

б) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{240}{241} < \frac{1}{11}$.

1.80 **Задача Паппа Александрийского (III в.).** Докажите, что если a, b, c и d — положительные числа и $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, то выполняется неравенство $ad > bc$.

1.81* **Задача Евклида (III в.).** Докажите, что если a — наибольшее из четырех положительных чисел a, b, c, d и $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то справедливо неравенство $a + d > b + c$.

1.82* Докажите, что для любого натурального числа n справедливо неравенство:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} < 1$;

б) $\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(n+3) \cdot (n+4)} < \frac{1}{4}$;

в) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} < \frac{1}{4}$;

г) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{2}$;

д) $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$;

е) $\frac{2}{(n+2)^2} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$.

1.83* Докажите, что для любых действительных чисел a и b:

а) если $a + b = 3$, то $a^2 + b^2 \geqslant 4{,}5$;

б) если $a + b = 4$, то $a^2 + b^2 \geqslant 8$;

в) если $a + b = 1$, то $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$;

г) если $a + b = 4$, то $a^4 + b^4 \geqslant 32$.

1.8*. Делимость целых чисел

1. Делимость натуральных чисел. Говорят, что натуральное число n делится (нацело) на натуральное число m, если существует такое натуральное число q, что справедливо равенство $n = mq$. Каждое из чисел m и q называют делителем числа n. У каждого натурального числа $n > 1$ есть два делителя 1 и n.

Если у натурального числа $n > 1$ нет других делителей, кроме 1 и n, то это число называют **простым**. Если у натурального числа $n > 1$ есть делители, отличные от 1 и n, то это число называют **составным**. Ясно, что число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

Справедлива **основная теорема арифметики**.

ТЕОРЕМА. Каждое натуральное число $n > 1$ можно представить единственным образом в виде произведения простых чисел.

Например, $13 = 13$, $21 = 3 \cdot 7$, $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$.

При решении многих задач используется следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Если каждое из двух натуральных чисел a и b делится на натуральное число c, то их сумма и разность делятся на c.

Если два натуральных числа m и n имеют наибольший общий делитель d, то пишут $d = (m, n)$. Если $d = 1$, то числа m и n называют **взаимно простыми** числами.

Докажем, например, что числа 2005 и 2011 взаимно простые.

Если числа 2005 и 2011 имеют общий делитель d, то по теореме 1 их разность 6 делится на d. Таким образом, общие делители чисел 2005 и 2011 надо искать среди делителей числа 6. Но 2005 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 6. Следовательно, $(2005, 2011) = 1$, т. е. числа 2005 и 2011 взаимно простые, что и требовалось доказать.

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА. Пусть натуральные числа m, n и q таковы, что $n = mq$ и n имеет делитель d такой, что $(m, d) = 1$, тогда число q делится на d.

Например, 777 делится на 7, а $(7, 3) = 1$, тогда из равенства $777 = 3 \cdot 259$ следует, что 259 делится на 7.

2. Деление целых чисел с остатком. Разделить с остатком целое число a на отличное от нуля целое число b — значит найти два таких целых числа q и r, что

$$a = bq + r \tag{1}$$

и

$$0 \leqslant r < |b|, \tag{2}$$

и при этом число q называют неполным частным, число r — остатком.

Подчеркнем, что в этом определении r — число неотрицательное.

Если $r = 0$, то говорят, что число a делится на b нацело и тогда q называют полным частным, а число b — делителем числа a.

Рассмотрим случай деления на натуральное число b.

ТЕОРЕМА 2. Для любой пары чисел $a \in Z$ и $b \in N$ существует и притом только одна пара целых чисел r и q таких, что выполняются условия (1) и (2).

Доказательство.

1) Пусть $a = 0$, $b \in N$, тогда пара $r = q = 0$ удовлетворяет условиям (1) и (2).

2) Пусть $a \in N$, $b \in N$, тогда рассмотрим числа

$$b \cdot 0,\ b \cdot 1,\ b \cdot 2,\ b \cdot 3,\ \ldots,\ b \cdot k,\ b \cdot (k + 1),\ \ldots$$

Как следствие Архимедова свойства действительных чисел получим, что существует целое неотрицательное число k такое, что $bk \leqslant a < b(k + 1)$.

Но тогда $a = bk + r$, где $r = a - bk \geqslant 0$ и $r < b$, так как

$$r = a - bk < b(k+1) - bk = b.$$

Это значит, что нашлись q и r, удовлетворяющие условиям (1) и (2).

3) Пусть a отрицательно и $|a| \in \boldsymbol{N}$, $b \in \boldsymbol{N}$, тогда по доказанному в пункте 2) существуют целые числа q_1 и r_1, такие, что $|a| = bq_1 + r_1$ и $0 \leqslant r_1 < b$.

Так как $|a| = -a$, то отсюда получаем, что $-a = bq_1 + r_1$ или $a = -bq_1 - r_1$.

Если $r_1 = 0$, то обозначив $q = -q_1$, получим, что справедливо равенство $a = bq + 0$.

Если $r_1 > 0$, то обозначив $q = -(q_1 + 1)$, $r = b - r_1$, получим, что справедливо равенство $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$.

Это значит, что нашлись целые числа q и r, удовлетворяющие условиям теоремы.

Итак, показано, что для любых $a \in \boldsymbol{Z}$ и $b \in \boldsymbol{N}$ существует пара целых чисел q и r, удовлетворяющая условиям (1) и (2). Докажем теперь, что такая пара единственная.

Предположим противное: пусть справедливы два равенства:

$$a = bq_1 + r_1 \text{ и } a = bq_2 + r_2, \text{ где } 0 \leqslant r_1 < b \text{ и } 0 \leqslant r_2 < b.$$

Тогда справедливо равенство

$$r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1). \tag{3}$$

Предположим, что $q_2 > q_1$, тогда из равенства (3) следует, что $r_1 = b(q_2 - q_1) + r_2 \geqslant b$. Получилось противоречие с условием $r_1 < b$.

Если предположим, что $q_2 < q_1$, то тоже получим противоречие. Следовательно, $q_2 = q_1$, но тогда и $r_1 = r_2$. А это означает, что пара q и r единственная. Теорема 2 доказана.

При делении целого числа a на натуральное число m может получиться только m остатков: 0, 1, 2, 3, ... , $m - 1$. Поэтому множество $\boldsymbol{Z}$ всех целых чисел можно разбить на m непересекающихся классов, в каждый из которых входят те и только те целые числа, которые при делении на m дают остаток r ($r = 0, 1, 2, \ldots, m - 1$). Это свойство целых чисел часто применяют при решении задач.

ПРИМЕР. Найдем все целые числа, которые при делении на 3 дают остаток 2, а при делении на 2 дают остаток 1.

При делении на 6 могут получиться остатки 0, 1, 2, 3, 4, 5. Разобьем множество всех целых чисел на m непересекающихся классов чисел вида $6n + r$, где $r = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

Нетрудно убедиться, что лишь для чисел, имеющих вид $6n + 5$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, выполняются оба условия задачи.

Ответ. Числа вида $6n + 5$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

1.84 Определите целые числа m, n, k и p, для которых справедливо равенство:

а) $2^{m+n} \cdot 3^{k+1} \cdot 5^7 \cdot 7^{12} = 2^{7-n} \cdot 3^7 \cdot 5^{m+p} \cdot 7^{m+n+k}$;

б) $2^{p-m} \cdot 75^n \cdot 3^p \cdot 7^{m+4} = 21^k \cdot 27 \cdot 5^p \cdot 14^n \cdot 2^m$.

1.85 Докажите, что числа:

а) 1997 и 1999; б) 1997 и 2002;

в) 2001 и 2006; г) 2003 и 2009

являются взаимно простыми числами.

1.86 Докажите, что дроби:

а) $\frac{1997}{1999}$; б) $\frac{2007}{1999}$; в) $\frac{2011}{2027}$; г) $\frac{3333}{3365}$

являются несократимыми.

1.87 Докажите, что произведение:

а) двух последовательных натуральных чисел делится на 2;

б) трех последовательных натуральных чисел делится на 6;

в) четырех последовательных натуральных чисел делится на 24.

1.88 Найдите все целые числа, которые при делении и на 4, и на 3, и на 2 дают остаток 1.

1.89 Найдите все целые числа, которые при делении на 4 дают остаток 3, при делении на 3 дают остаток 2, при делении на 2 дают остаток 1.

1.90 Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

1.9*. Сравнения по модулю m

Описанный в конце п. 1.8 прием разбиения множества Z на классы может быть описан с помощью нового понятия: сравнения по модулю m.

Пусть m — данное натуральное число ($m \geqslant 2$). Целые числа a и b называют **сравнимыми по модулю m**, если каждое из них при делении на m дает один и тот же остаток r.

Иными словами, целые числа a и b сравнимы по модулю m, если разность $a - b$ при делении на m дает остаток 0.

Для обозначения того, что целые числа a и b сравнимы по модулю m, используют такую форму записи:

$$a \equiv b \pmod{m},$$

что читают так: «a сравнимо с b по модулю m». Знак $\equiv$ называют знаком сравнения.

ПРИМЕР 1. 1) $100 \equiv 1 \pmod 9$, так как $100 - 1$ делится на 9; 2) $1000 \equiv -1 \pmod{11}$, так как $1000 - (-1)$ делится на 11.

Свойства сравнений очень похожи на свойства равенств. Сформулируем некоторые из них.

1. Если $a \equiv b \pmod m$ и $b \equiv c \pmod m$, то $a \equiv c \pmod m$.
2. Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то: а) $a + c \equiv b + d \pmod m$; б) $a - c \equiv b - d \pmod m$; в) $ac \equiv bd \pmod m$.
3. Если $a \equiv b \pmod m$, то $a^n \equiv b^n \pmod m$, $n \in N$.
4. Пусть $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен n-й степени от x с целыми коэффициентами. Тогда если $a \equiv b \pmod m$, то $P_n(a) \equiv P_n(b) \pmod m$.

Приведем примеры применения сравнений.

ПРИМЕР 2. Докажем, что $6^{22} - 1$ делится на 7.

Так как $6 \equiv -1 \pmod 7$, то $6^{22} \equiv (-1)^{22} \pmod 7$ (по свойству 3). Так как $(-1)^{22} = 1$, то $6^{22} \equiv 1 \pmod 7$. Это означает, что $6^{22} - 1$ делится на 7, что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 3. Найдем остаток от деления 2^{29} на 11.

Так как $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$, то $(2^5)^5 \equiv (-1)^5 \pmod{11}$, т. е. $2^{25} \equiv -1 \pmod{11}$. Так как $2^4 \equiv 5 \pmod{11}$ и $2^{29} = 2^{25} \cdot 2^4$, то $2^{29} \equiv 5 \cdot (-1) \pmod{11}$, т. е. $2^{29} \equiv -5 \pmod{11}$. Так как $-5 \equiv 6 \pmod{11}$, то остаток от деления 2^{29} на 11 равен 6.

ПРИМЕР 4. Докажем признак делимости на 9: если сумма $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ цифр натурального числа $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ делится на 9, то и число N делится на 9.

Пусть $N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ — натуральное число, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — его цифры, $a_n \neq 0$. Рассмотрим многочлен n-й степени

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Так как $10 \equiv 1 \pmod 9$, то $N = P_n(10) \equiv P_n(1) \pmod 9$, где $P_n(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ (по свойству 4), т. е. при делении на 9 число N и сумма его цифр имеют одинаковые остатки. В частности, если сумма $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ делится на 9, то и число N делится на 9 (признак делимости на 9 доказан).

Из этого рассуждения вытекает, что верно и обратное утверждение: если число N делится на 9, то и сумма его цифр $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ делится на 9.

1.91 Докажите признаки делимости на:
а) 10; б) 2; в) 5; г) 3; д) 9; е) 4; ж) 25.

1.92 Сформулируйте признак делимости на 11 и докажите его.

1.93 Верно ли, что целые числа a и b сравнимы по модулю m, если они принадлежат одному и тому же классу A_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$)?

1.94 Докажите свойства 1—4 сравнений.

1.95 Определите остаток от деления числа 3^{25} на:
а) 10; б) 11; в) 13.

1.96 Не выполняя деления, определите остаток от деления числа 200420052006200720082009 на 9.

1.97 Пусть $P_3(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$. Определите последнюю цифру числа $P_3(10^{2005})$.

1.98 Пусть $P_{2004}(x) = x^{2004} - x^{2003} + x^{2002} - x^{2001} \ldots - x + 1$. Определите последнюю цифру числа $P_{2004}(100^{2005})$.

1.99 Докажите, что квадрат любого натурального числа либо делится на 9, либо при делении на 3 дает остаток 1.

1.100 Найдите последнюю цифру числа 9^{9^9}.

1.10*. Задачи с целочисленными неизвестными

Выясним, можно ли при помощи монет 2 р. и 5 р. заплатить за покупку 12 р.

Если обозначить через x число монет по 2 р., через y — число монет по 5 р., которые надо уплатить за покупку, то по условию задачи должно выполняться равенство

$$2x + 5y = 12, \tag{1}$$

и задача свелась к нахождению целых решений уравнения (1).

Уравнение (1), а значит и наша задача имеют бесконечно много решений:

1) $x = 1$, $y = 2$; 2) $x = 6$, $y = 0$; 3) $x = -4$, $y = 4$ ... .

Отметим, что отрицательное значение x (или y) означает, что покупатель получил сдачу в $|x|$ монет по 2 р. (или в $|y|$ монет по 5 р.).

Уравнение (1) является примером **диофантовых уравнений** — уравнений с несколькими неизвестными, решения которых ищутся в целых числах. Подобные уравнения возникают в некоторых задачах математики, физики, экономики и т. д. Название «диофантовы» дано им по имени древнегреческого математика Диофанта (III в.).

Простейшее из диофантовых уравнений — уравнение первой степени:

$$ax + by = c, \tag{2}$$

где a и b — целые отличные от нуля числа.

Если $c = 0$, то уравнение (2) имеет очевидное решение (0; 0).

Если $c \neq 0$ и уравнение (2) имеет решение (x_0, y_0), то целое число $ax_0 + by_0$ делится на $d = (a, b)$, поэтому c также должно делиться на наибольший общий делитель a и b. Следовательно, если c не делится на наибольший общий делитель чисел a и b, то уравнение (2) не имеет решений.

Например, уравнение $3x + 6y = 5$ не имеет решений, так как 5 не делится на $3 = (3, 6)$.

Если c делится на d — наибольший общий делитель чисел a и b, то уравнение (2) можно упростить, разделив его на d. Получится уравнение

$$a_1x + b_1y = c_1,$$

где $(a_1, b_1) = 1$, т. е. a_1 и b_1 — взаимно простые числа.

Если уравнение (2) имеет решение (x_0, y_0) и $(a, b) = 1$, то все решения уравнения (2) задаются формулами

$$x = x_0 + bn,\ y = y_0 - an, \tag{3}$$

где n — любое целое число.

Решение (x_0, y_0) называют частным решением, а решение, задаваемое формулой (3), называют общим решением уравнения (2).

Действительно, если уравнение (2) имеет решения (x_0, y_0) и (x_1, y_1), то справедливы равенства

$$ax_0 + by_0 = c,$$
$$ax_1 + by_1 = c,$$

откуда получаем, что

$$a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1). \tag{4}$$

Левая часть равенства (4) делится на a, следовательно, и правая его часть делится на a, но так как $(a, b) = 1$, то на основании леммы заключаем, что $y_0 - y_1$ делится на a, следовательно, существует такое целое число n, что $y_0 - y_1 = na$, т. е. $y_1 = y_0 - na$. Но тогда из равенства (4) следует, что $x_1 = x_0 + bn$. Следовательно, все решения уравнения (2) задаются формулами (3).

Итак, если $(a, b) = d \neq 1$ и c не делится на d, то уравнение (2) не имеет решений.

Если $(a, b) = d \neq 1$ и c делится на d, то, разделив уравнение (2) на d, надо перейти к случаю $(a_1, b_1) = 1$.

Прежде всего отметим, что частное решение иногда можно найти подбором. Например, найдем частное решение уравнения

$$3x + 5y = 13.$$

Так как (3, 5) = 1, то это уравнение имеет бесконечно много решений. Одно из них очевидно: $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Поэтому все решения этого уравнения задаются формулами $x = 1 + 5n$, $y = 2 - 3n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

ПРИМЕР 1. Задача Л. Эйлера. Некий чиновник купил лошадей и быков за 1770 талеров. За каждую лошадь он уплатил по 31 талеру, а за каждого быка — по 21 талеру. Сколько лошадей и быков купил чиновник?

Пусть чиновник купил x лошадей и y быков. Тогда

$$31x + 21y = 1770. \tag{5}$$

По смыслу задачи x и y натуральные числа. Так как 21 и 1770 делятся на 3, а 31 не делится на 3, то по теореме 1 и лемме (п. 1.8) x делится на 3. Обозначив $x = 3x_1$, где x_1 — натуральное число, перепишем уравнение (5) в виде

$$31x_1 + 7y = 590,$$

откуда получим, что

$$x_1 = \frac{590 - 7y}{31} = 19 - \frac{7y - 1}{31}.$$

Очевидно, что x_1 будет натуральным числом, если $7y - 1$ делится на 31. Наименьшее натуральное y, при котором это произойдет, равно 9. При этом $x_1 = 17$, $x = 51$.

Итак, найдено частное решение уравнения (5): $x_0 = 51$, $y_0 = 9$. Другие решения найдет, выписав общее решение уравнения (5):

$$x = 51 + 21n,\ y = 9 - 31n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как $y = 9$ — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию задачи, то следующие натуральные значения y получим, беря $n = -1, -2, -3, \dots$.

При $n = -1$ получим $x = 30$, $y = 40$; при $n = -2$ получим: $x = 9$, $y = 71$; при $n \leqslant -3$ получим отрицательные значения x, которые не удовлетворяют условиям задачи.

Таким образом, уравнение (5) имеет только 3 решения в натуральных числах: (51; 9), (30; 40), (9; 71).

Ответ. Чиновник купил лошадей и быков 9 и 71, или 30 и 40, или 51 и 9 соответственно.

Рассмотрим теперь диофантовы уравнения степени n ($n > 1$). Прежде всего отметим два знаменитых диофантова уравнения: уравнение Пифагора

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{6}$$

и уравнение Ферма

$$x^n + y^n = z^n,\ n \in \boldsymbol{N},\ n \geqslant 3, \tag{7}$$

решения которых ищутся в натуральных числах.

Если считать, что x и y — длины катетов, а z — длина гипотенузы прямоугольного треугольника, то каждое решение уравнения (6) задает стороны так называемого пифагорова треугольника, т. е. стороны прямоугольного треугольника, длины всех сторон которого — натуральные числа.

Большая (великая) теорема Ферма гласит: уравнение (7) не имеет решений в натуральных числах. Эта теорема была сформулирована итальянским математиком П. Ферма более 300 лет назад, а доказана лишь в 1993 г.

Отметим, что нет общих методов решения диофантовых уравнений. Ниже приведены два частных метода решения простых диофантовых уравнений.

Некоторые из них решаются с использованием разложения на множители.

ПРИМЕР 2. Решим в целых числах уравнение

$$x^2 - 4y^2 = 5. \qquad (8)$$

Перепишем уравнение (8) в виде

$$(x - 2y)(x + 2y) = 5.$$

По условию x и y — целые числа, поэтому произведение целых чисел равно 5 лишь в четырех случаях:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 2y = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + 2y = -5, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 2y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = -5 \\ x + 2y = -1. \end{cases}$$

Решив каждую из этих систем, найдем все решения уравнения (8) в целых числах:

$$(3; 1), (-3; -1), (3; -1), (-3; 1).$$

Ответ. (3; 1), (–3; –1), (3; –1), (–3; 1).

Некоторые диофантовы уравнения решаются выделением полных квадратов.

ПРИМЕР 3. Решим в целых числах уравнение

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0. \qquad (9)$$

Перепишем уравнение (9) в виде

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 4.$$

Так как $x - 5$ и $y + 1$ — целые числа, то сумма их квадратов равна $4 = 2^2$ лишь в четырех случаях

$$\begin{cases} x - 5 = 2 \\ y + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 5 = -2 \\ y + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 5 = 0 \\ y + 1 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 5 = 0 \\ y + 1 = -2. \end{cases}$$

Решив каждую из этих систем, найдем все решения уравнения (9) в целых числах:

$$(7; -1), (3; -1), (5; 1), (5; -3).$$

Ответ. (7; –1), (3; –1), (5; 1), (5; –3).

1.101 Подберите частное решение диофантова уравнения первой степени и запишите общее решение этого уравнения:
а) $x + y = 5$; б) $8x - y = 15$; в) $5x + 7y = 17$.

1.102 Объясните, почему не имеет решений в целых числах уравнение:
а) $3x + 12y = 5$; б) $14x + 7y = 48$; в) $2x + 10y = 27$.

1.103 **Задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи, 1180—1240 гг.).** Некто купил 30 птиц за 30 монет, из числа этих птиц за каждых трех воробьев заплачена 1 монета, за каждые две горлицы — также 1 монета и, наконец, за каждого голубя — по 2 монеты. Сколько было птиц каждой породы?

1.104 **Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого (1703 г.).** Купил некто на 80 алтын гусей, утят и чирков. Гуся покупал по 2 алтына, утку по 1 алтыну, чирка же по 3 деньги, а всех куплено 80 птиц. Спрашивается, сколько каких птиц он купил. (1 алтын = 3 коп, 1 деньга = 0,5 коп.)

1.105 Найдите семь пифагоровых треугольников.

Решите в целых числах уравнение **(1.106—1.107)**:

1.106 а) $x(x + y) = 7$; б) $x(x - 3y) = 2$;
в) $(x + 2y)(2x - y) = -2$; г) $xy - 2y + x = 3$;
д) $4x^2 - y^2 = 15$; е) $9x^2 + 16y^2 = 25$.

1.107 а) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -5$; б) $4x^2 + y^2 - 4x + 6y = -5$;
в) $xy + 4x - 2y - 11 = 0$; г) $xy - 2x - 3y + 1 = 0$.

1.108 Докажите, что уравнение:
а) $x^2 - 4x + y^2 + 4y + 8 = 0$ имеет единственное целочисленное решение;
б) $x^2 - 4x + y^2 + 4y + 9 = 0$ не имеет решений.

§ 2. Рациональные уравнения и неравенства

2.1. Рациональные выражения

Напомним, что одночленом называют число, букву, произведение букв и чисел, а многочленом — сумму нескольких одночленов. Любой одночлен можно рассматривать как многочлен.

Например, $3a^2b$; a; 2; 0 — одночлены, $3a + 2b$; $3x^2 - 4x + 5$; 6; 0; c — многочлены.

Многочлен называют нулевым, если он после приведения подобных членов превращается в число нуль.

Будем обозначать многочлены большими буквами латинского алфавита A, B, C, D, ...

Сумма, разность и произведение двух многочленов являются многочленами. Если многочлен C представлен в виде

$$C = A \cdot B,$$

где A и B — многочлены, то говорят, что многочлен C разложен на множители A и B.

Разложение многочленов на множители бывает необходимо при решении уравнений и других задач. Большую помощь в таких случаях могут оказать изученные ранее формулы сокращенного умножения:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Список формул сокращенного умножения можно продолжить. В пункте 2.2 будут доказаны формулы для $(a + b)^n$, $a^n - b^n$ и $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ для любого натурального n.

Рассмотрим теперь частное двух многочленов.

Алгебраической дробью называют выражение $\frac{A}{B}$ — частное от деления многочлена A на ненулевой многочлен B, т. е. на многочлен, который после приведения подобных членов не обращается в нуль. Алгебраические дроби подчинены правилам, выраженным следующими равенствами:

$$\frac{A}{1} = A, \quad -\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}$$

для любого ненулевого многочлена C.

Таким образом, любой многочлен можно рассматривать как алгебраическую дробь.

Алгебраические дроби можно складывать, вычитать, умножать и делить по правилам:

$$1)\ \frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D + B \cdot C}{B \cdot D},$$

$$2)\ \frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D - B \cdot C}{B \cdot D},$$

$$3)\ \frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D},$$

$$4)\ \frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C},$$

где в правилах 1, 2, 3 B и D — ненулевые многочлены, в правиле 4 B, C и D — ненулевые многочлены.

Рациональным выражением называют выражение, в котором несколько алгебраических дробей соединено знаками арифметических действий, причем это выражение не содержит деления на нулевой многочлен.

Например, $\frac{3a^2-4}{a}$, $3a+6$ — рациональные выражения.

Если каждый одночлен многочлена является либо числом, либо буквой, либо произведением числа и натуральной степени той же буквы, то про такой многочлен говорят, что он «многочлен относительно одной буквы» или «многочлен от одной переменной». Приведем примеры многочленов от одной переменной:

$$2x+3,\quad y^3-y-4{,}5,\quad 3a^8-0{,}5,\quad -7z^5+\frac{1}{4}.$$

Аналогично определяют многочлен от двух, трех и т. д. переменных. Приведем примеры многочленов от двух переменных:

$$x^3+3y^4+4xy^2-1,\quad a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Отметим, что в приведенных выше формулах сокращенного умножения участвуют многочлены или произведения многочленов от двух переменных.

Многочлен от нескольких переменных называют **симметрическим многочленом**, если его вид не изменяется при любой перестановке этих переменных.

Например, многочлены $x+y$, a^2+b^2-1, zt и $5a^3+6ab+5b^3$ — симметрические многочлены от двух переменных, а многочлены $x+y+z$, $a^3+b^3+c^3$, $6zuv$ — симметрические многочлены от трех переменных.

В то же время многочлены $x-y$, a^2-b^2 и a^3+ab-b^3 — не симметрические многочлены.

Можно показать, что любой симметрический многочлен от двух переменных x и y представим в виде многочлена от двух симметрических многочленов $\alpha=x+y$ и $\beta=xy$.

Покажем это для многочленов x^n+y^n, где $n=2, 3, 4$:

1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\alpha^2-2\beta$;

2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy\,(x+y)=\alpha^3-3\alpha\beta$;

3) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(\alpha^2-2\beta)^2-2\beta^2=a^4-4\alpha^2\beta+2\beta^2$.

Эти формулы иногда применяются при решении уравнений, неравенств, систем.

2.1° а) Что называют: одночленом; многочленом?
б) Можно ли любое число считать многочленом?
в) Является ли сумма, разность, произведение двух многочленов многочленом?

2.2 Докажите справедливость следующих формул сокращенного умножения:
а) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
б) $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$;
в) $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

2.3° а) Что называют алгебраической дробью?
б) Является ли любой многочлен, любое число алгебраической дробью?
в) Какое выражение называют рациональным выражением? Приведите примеры рациональных выражений.

2.4 Сократите алгебраическую дробь:
а) $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$; б) $\dfrac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4}$; в) $\dfrac{x^4 + 27x}{x^2 + 3x}$; г) $\dfrac{x^6 - 1}{x - 1}$.

2.5 Приведите к знаменателю $x^2 - 25$ алгебраическую дробь:
а) $\dfrac{1}{x + 5}$; б) $\dfrac{x}{x - 5}$; в) $\dfrac{3}{5 - x}$; г) 2.

Упростите выражение (2.6—2.9):

2.6 а) $\dfrac{5}{x - 1} + \dfrac{x}{x - 1}$; б) $\dfrac{6}{x - 1} + \dfrac{x}{1 - x}$;
в) $\dfrac{x}{x + 2} - \dfrac{x}{x - 2}$; г) $\dfrac{1}{x^2 - 9} + \dfrac{2 - x}{x - 3}$.

2.7 а) $\dfrac{1}{a^2 + ab + b^2} + \dfrac{b}{a^3 - b^3}$; б) $\dfrac{m^2 + n^2}{m^3 + n^3} - \dfrac{1}{2(m + n)}$;
в) $\dfrac{x^2 - 2xy}{(x - 2y)^3} + \dfrac{1}{2y - x}$; г) $\dfrac{2(p + q)}{p^3 - q^3} + \dfrac{2}{q^2 - p^2}$.

2.8 а) $\dfrac{(ab + b - a - 1)(a - 1)}{(a^2 - 1)(b - 1)} \cdot 3$; б) $\dfrac{(a^2 + ab - ac - bc)^2}{(a^2 + 2ab + b^2)(a^2 - 2ac + c^2)} \cdot 4$;
в) $\dfrac{(a + b)^3 - (a - b)^3}{2b(3a^2 + b^2)} + 1$; г) $\dfrac{(a^2 + ab + b^2)(a - b)^2(a + b)}{(a^3 - b^3)(a^2 - b^2)}$.

2.9 а) $\dfrac{1}{a - b} - \dfrac{1}{b - a} - \dfrac{2a}{a^2 - b^2}$; б) $\dfrac{x^2 - y^2}{2y^2} \cdot \dfrac{xy + y^2}{(x + y)^2}$;
в) $\dfrac{(a + b)^3 + (a - b)^3}{2ab(a^2 + 3b^2)} - 1$; г) $\dfrac{(a^2 - ab + b^2)(a + b)^2(a - b)}{(a^3 + b^3)(a^2 - b^2)}$.

2.10* **Из сборника задач П. А. Ларичева.**

а) Упростите выражение

$$\left(\frac{a}{a-2b}+\frac{b}{a+2b}\right)\cdot\frac{a^3+8b^3}{a^3+3a^2b-2ab^2}$$

и найдите его значение при $a = 0{,}5$, $b = -1$.

б) Упростите выражение

$$\frac{a+2b}{3a-3b}-\frac{3c-a}{2a-2c}+\frac{a^2-bc}{a^2-ac+bc-ab}$$

и найдите его значение при $a = \frac{1}{6}$, $b = -1$.

2.11* Является ли симметрическим многочлен:

а) $a^2 + 2ab + b^2$; б) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
в) $5a^2 + 5b^2 - 3a^3 - 3b^3 + 4ab$; г) $2a^2 + 3b^2 - 4a^3 - 5b^3 + 6ab$;
д) $a^2b^2c^2 - 3abc + a + b + c + 1$; е) $abc - 4a + 4b - 4c + 1$?

2.12* Уравнение:

а) $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 7$ имеет решение (6; 7);
б) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ имеет решение (3; 2).
Укажите еще одно решение этого уравнения.

2.13* Докажите, что если $f(x; y)$ — симметрический многочлен и пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением уравнения $f(x; y) = 0$, то пара чисел $(y_0; x_0)$ также является решением этого уравнения.

2.2. Формулы бинома Ньютона, суммы и разности степеней

В п. 2.1 отмечалось, что справедливы следующие формулы:

$$(a+b)^1 = a + b, \tag{1}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{2}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \tag{3}$$

Покажем, что

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \tag{4}$$

Действительно, применяя формулу (3) и перемножая многочлены, имеем:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) =\\ &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 =\\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

Рассматривая формулы (1) — (4), можно заметить, что при разложении $(a + b)^n$ в многочлен получается сумма членов a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, ..., ab^{n-1}, b^n с некоторыми коэффициентами. Для нахождения этих коэффициентов часто применяют **треугольник Паскаля.** Он устроен так. В его нулевой строке стоит единица, в первой строке стоят две единицы, далее в каждой следующей строке по краям стоят единицы, а каждое из оставшихся $n - 1$ чисел n-й строки равно сумме двух чисел, записанных над ним в предыдущей строке.

Номер строки	
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
...	...

В частности, используя треугольник Паскаля, получим, что

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5, \quad (5)$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6. \quad (6)$$

Конечно, используя треугольник Паскаля можно найти разложение $(a + b)^n$ в многочлен для любого натурального n. Но этот процесс для больших n достаточно трудоемок. Кроме того, надо обосновать правильность треугольника Паскаля. Поэтому приведем общую формулу.

Для любого натурального числа n справедлива формула, называемая **формулой бинома Ньютона:**

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n, \quad (7)$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k.

Слагаемые суммы в правой части называют членами разложения бинома Ньютона. Член a^n называют нулевым членом разложения бинома Ньютона, далее идут первый, второй и т. д. члены до n-го (равного b^n) включительно; k-й член бинома Ньютона имеет вид

$$C_n^k a^{n-k} b^k \ (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Формулу (7) можно записать еще так:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \quad (7')$$

Правая часть равенства (7′) читается так: сумма слагаемых $C_n^k a^{n-k} b^k$, взятая для всех целых k от 0 до n.

Числа C_n^k называют также **биномиальными коэффициентами.**

Легко проверить, что коэффициенты C_n^k действительно равны соответствующим числам n-й строки треугольника Паскаля. При $n = 1, 2, \dots 6$ формула (7) выражает приведенные выше равенства (1) — (6).

Докажем формулу (7) для любого натурального n методом математической индукции. При $n = 1$ она верна:

$$(a + b)^1 = a + b.$$

Допустим, что формула (7) верна при некотором натуральном $n = k$:

$$(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + C_k^3 a^{k-3} b^3 + \dots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + b^k. \quad (8)$$

Докажем, что тогда она верна и при $n = k + 1$.

В самом деле, применяя равенство (8), получим

$$\begin{aligned} &(a + b)^{k+1} = (a + b)(a + b)^k = \\ &= a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \dots + C_k^k a b^k + \\ &\quad + C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + \dots + C_k^{k-1} a b^k + b^{k+1} = \\ &= a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+1}^2 a^{k-1} b^2 + \dots + C_{k+1}^k a b^k + b^{k+1}. \end{aligned}$$

Сумма в третьей строке сдвинута так, чтобы в столбцах стояли подобные члены с одинаковыми произведениями $a^{n-k} b^{k+1}$. Сумма коэффициентов при них вычисляется по формуле $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, приведенной в п. 1.6.

Таким образом, показано, что из справедливости формулы (7) для $n = k$ следует ее справедливость для $n = k + 1$.

На основании принципа математической индукции это означает, что равенство (7) верно для любых натуральных n.

Формулу (7) можно доказать комбинаторным способом. Рассмотрим сначала произведение:

$$(a + x_1)(a + x_2) \dots (a + x_n). \quad (9)$$

Раскроем скобки в произведении (9):

$$\begin{aligned} (a + x_1)(a + x_2) \dots (a + x_n) &= a^n + a^{n-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \\ &+ a^{n-2}(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) + \\ &+ a^{n-3}(x_1 x_2 x_3 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n) + \dots + x_1 x_2 x_3 \dots x_n. \end{aligned} \quad (10)$$

Заменив все x_m ($m = 1, 2, \dots, n$) на b, получим

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

т. е. формулу (7).

В самом деле, количество слагаемых в первых скобках равенства (10) равно $n = C_n^1$ (каждое из них равно b). Слагаемые во вторых скобках есть всевозможные сочетания из n элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по два, их количество равно C_n^2 (каждое из них равно b^2). Слагаемые в третьих скобках есть всевозможные сочетания из указанных элементов по три, их количество равно C_n^3 (каждое из них равно b^3) и т. д.

Как отмечено в п. 2.1, справедливы формулы:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Оказывается, что для любого натурального числа n ($n \geqslant 2$) справедлива формула

$$\boldsymbol{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}).} \qquad (11)$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

Для $n = 2$ равенство (11) справедливо:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Предположим, что равенство (11) справедливо для некоторого натурального k, т. е. что справедливо равенство

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + b^{k-1}). \qquad (12)$$

Преобразуем разность $a^{k+1} - b^{k+1}$:

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1} = a(a^k - b^k) + b^k(a - b).$$

Применяя равенство (12), получим, что справедливо равенство

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a(a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + b^{k-1}) + b^k(a - b) =$$
$$= (a - b)(a(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + b^{k-1}) + b^k) =$$
$$= (a - b)(a^k + a^{k-1}b + \ldots + ab^{k-1} + b^k),$$

т. е. получаем, что из справедливости равенства (11) для $n = k$ следует его справедливость для $n = k + 1$. На основании принципа математической индукции это означает, что равенство (12) справедливо для любого натурального числа $n \geqslant 2$.

В п. 2.1 было отмечено, что справедлива формула:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Оказывается, что для любого натурального числа n справедлива формула

$$\boldsymbol{a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}).} \qquad (13)$$

Покажем, как из равенства (11) для любого натурального числа n следует равенство (13).

Обозначим $c = -b$, тогда $b^{2n+1} = -c^{2n+1}$ и из формулы (11) имеем:

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = a^{2n+1} - c^{2n+1} =$$
$$= (a - c)(a^{2n} + a^{2n-1}c + a^{2n-2}c^2 + \ldots + ac^{2n-1} + c^{2n}). \qquad (14)$$

Заменив в равенстве (14) c на $-b$, получим равенство (13), которое называют формулой разложения на множители многочлена $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.

Заметим, что многочлен $a^{2n} + b^{2n}$ нельзя разложить в произведение многочленов, один из которых $a + b$ или $a - b$.

2.14 Напишите числа:

а) C_2^0, C_2^1, C_2^2 и сравните их с коэффициентами разложения бинома $(a + x)^2$;

б) C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3 и сравните их с коэффициентами разложения бинома $(a + x)^3$;

в) C_4^0, C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4 и сравните их с коэффициентами разложения бинома $(a + x)^4$.

Убедитесь, что найденные в этом задании числа стоят в n-й строке треугольника Паскаля ($n = 2, 3, 4$).

2.15. Сколько членов в формуле бинома Ньютона при:

а) $n = 3$; б) $n = 5$; в) $n = 7$;
г) $n = 4$; д) $n = 6$; е) $n = 8$?

2.16. Сколько членов в формуле бинома Ньютона при:

а) $n = 2l$; б) $n = 2l + 1$,

где l — натуральное число? В каком из этих двух случаев имеется средний член в формуле бинома Ньютона?

2.17 Напишите разложение по формуле бинома Ньютона:

а) $(a + x)^5$; б) $(a + x)^6$; в) $(a + x)^7$.

2.18 Найдите коэффициент третьего члена в разложении по формуле бинома Ньютона:

а) $(a + x)^6$; б) $(a + x)^{10}$; в) $(a + x)^{12}$.

2.19 Найдите коэффициент среднего члена в разложении по формуле бинома Ньютона:

а) $(a + x)^8$; б) $(a + x)^{10}$; в) $(a + x)^{16}$.

2.20 Найдите третий член разложения по формуле бинома Ньютона:

а) $(a + 1)^8$; б) $(2a + 3)^9$; в) $(3a - 5x)^{11}$.

2.21 Найдите средний член разложения по формуле бинома Ньютона:

а) $(a+3)^6$; б) $(3a-4x)^8$; в) $(5+2x)^{14}$.

2.22 Упростите выражение:

а) $(a+b)^3-(a-b)^3-2b^3$; б) $(a+b)^3+(a-b)^3-2a^3$;

в) $(a+b)^3-(a^3+b^3)$; г) $(a-b)^3+(b^3-a^3)$.

Докажите равенство (**2.23—2.24**):

2.23 а) $(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)(a^8+1)=a^{16}-1$;

б) $(b+c)(b^2+c^2)(b^4+c^4)(b^8+c^8)=\dfrac{b^{16}-c^{16}}{b-c}$ $(b \neq c)$.

2.24 а) $(b+2)(b^2-2b+4)(b^3-8)=b^6-64$;

б) $(a-c)(a^2+ac+c^2)(a^3+c^3)+c^6=a^6$.

2.25* Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^3-b^3}{a^4-b^4}$; б) $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$; в) $\dfrac{a^5-b^5}{a^3-b^3}$; г) $\dfrac{a^5+b^5}{a^7+b^7}$;

д) $\dfrac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^4-b^4}$; е) $\dfrac{a^5+b^5}{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4}$;

ж) $\dfrac{a^3-8}{a^4-16}$; з) $\dfrac{a^3+27}{a^4-3a+9}$; и) $\dfrac{a^5-32}{a^3-8}$; к) $\dfrac{a^5+32}{a^7+128}$;

л) $\dfrac{a^3+2a^2+4a+8}{a^4-16}$; м) $\dfrac{a^5+1}{a^4-a^3+a^2-a+1}$.

2.26* Сократима ли дробь:

а) $\dfrac{a^{1999}+b^{1999}}{a^{1997}+b^{1997}}$; б) $\dfrac{a^{1999}-1}{a^{1998}-1}$?

2.3*. Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида

Рассмотрим многочлены относительно одной переменной x, т. е. многочлены вида

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0, \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — данные числа, называемые коэффициентами многочлена (1), коэффициент a_n называют коэффициентом при старшем члене, а коэффициент a_0 — свободным членом. Если $a_n \neq 0$, то многочлен (1) называют многочленом степени n.

Например, коэффициенты многочлена $5x^3+4x^2-2x+7$ равны 5, 4, -2 и 7, коэффициент при старшем члене равен 5, свободный член равен 7, степень многочлена равна 3.

Если все коэффициенты многочлена равны нулю, то этот многочлен есть нулевой многочлен (его степень не определяется).

Разделить многочлен A на многочлен B с остатком — значит найти многочлены Q и R, такие, что выполняется равенство $A = Q \cdot B + R$, причем либо степень многочлена R меньше степени многочлена B, либо R — нулевой многочлен. Многочлен Q называют частным (неполным частным), многочлен R — остатком. Если R есть нулевой многочлен, то многочлен A делится на многочлен B нацело и многочлен B называют делителем многочлена A.

Многочлен нулевой степени есть число, отличное от нуля. Любое число, отличное от нуля, можно рассматривать как делитель любого многочлена. Например, число $\frac{1}{7}$ есть делитель многочлена $x^2 + 2x + 3$, потому что $x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{7}(7x^2 + 14x + 21)$.

Деление с остатком многочлена A на ненулевой многочлен B обычно выполняют уголком. Покажем, как это делается, на примерах.

ПРИМЕР 1. Разделим многочлен $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5$ на многочлен $x^2 - 3x + 1$:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5 & x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4 - 6x^3 + 2x^2} & 2x^2 + 3x + 9 \\
\qquad 3x^3 + 0x^2 - 7x & \\
\qquad \underline{3x^3 - 9x^2 + 3x} & \\
\qquad\qquad 9x^2 - 10x + 5 & \\
\qquad\qquad \underline{9x^2 - 27x + 9} & \\
\qquad\qquad\qquad 17x - 4 &
\end{array}
$$

Итак, $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5 = (2x^2 + 3x + 9)(x^2 - 3x + 1) + 17x - 4$.

При делении многочлена $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5$ на многочлен $x^2 - 3x + 1$ получено неполное частное $2x^2 + 3x + 9$ и остаток $17x - 4$.

ПРИМЕР 2. Разделим многочлен $x^5 - 7x^3 - 12x + 18$ на многочлен $x^3 - 2x^2 - 6$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 0x^4 - 7x^3 + 0x^2 - 12x + 18 & x^3 - 2x^2 + 0x - 6 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5 - 2x^4 + 0x^3 - 6x^2} & x^2 + 2x - 3 \\
\qquad 2x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 12x & \\
\qquad \underline{2x^4 - 4x^3 + 0x^2 - 12x} & \\
\qquad\qquad -3x^3 + 6x^2 + 0x + 18 & \\
\qquad\qquad \underline{-3x^3 + 6x^2 + 0x + 18} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Итак, $x^5 - 7x^3 - 12x + 18 = (x^3 - 2x^2 - 6)(x^2 + 2x - 3)$. Многочлен $x^5 - 7x^3 - 12x + 18$ разделился на многочлен $x^3 - 2x^2 - 6$ нацело, получено частное $x^2 + 2x - 3$ и остаток — нулевой многочлен.

Пусть даны два многочлена:

$$A = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$B = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

относительно x, причем $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ и $n \geqslant m \geqslant 1$.

Наибольшим общим делителем многочленов A и B называют многочлен наибольшей степени $k \leqslant m$, на который делятся нацело и многочлен A, и многочлен B. Наибольший общий делитель многочленов A и B обозначают НОД (A, B). Запись НОД $(A, B) = 1$ означает, что наибольший общий делитель многочленов A и B есть единица, но тогда и любое действительное число, отличное от нуля (любая константа, отличная от нуля), т. е. любой многочлен степени 0, также есть наибольший общий делитель многочленов A и B.

Если многочлен A делится на многочлен B нацело, т. е. $A = Q \cdot B$, то НОД $(A, B) = B$. Если же A не делится на B нацело, то разделим с остатком многочлен A на многочлен B:

$$A = Q_1 \cdot B + R_1,$$

где степень остатка R_1 меньше степени многочлена B (R_1 — ненулевой многочлен). Теперь разделим B на R_1:

$$B = Q_2 \cdot R_1 + R_2,$$

где либо степень остатка R_2 меньше степени многочлена R_1, либо R_2 — нулевой многочлен. Если R_2 — нулевой многочлен, то НОД $(A, B) = R_1$. Если R_2 — ненулевой многочлен, то продолжим процесс последовательного деления многочленов с остатком. Этот процесс конечен, так как степени многочленов $R_1, R_2, \ldots, R_{k-1}$ строго убывают. В результате на k-м шаге получим систему равенств:

$$\begin{cases} A = Q_1 \cdot B + R_1 \\ B = Q_2 \cdot R_1 + R_2 \\ R_1 = Q_3 \cdot R_2 + R_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_{k-3} = Q_{k-1} \cdot R_{k-2} + R_{k-1} \\ R_{k-2} = Q_k \cdot R_{k-1}. \end{cases} \quad (2)$$

Просматривая цепочку равенств (2) снизу вверх, находим, что R_{k-1} является делителем многочленов A и B. Больше того, R_{k-1} есть наибольший общий делитель многочленов A и B, так как если просматривать цепочку равенств сверху вниз, то окажется, что любой делитель многочленов A и B является делителем R_{k-1}. Следовательно, НОД $(A, B) = R_{k-1}$.

Проведенный процесс называют **алгоритмом Евклида** для многочленов, его используют для нахождения наибольшего общего делителя двух многочленов.

НОД (A, B) есть последний неравный нулю остаток в алгоритме Евклида.

ПРИМЕР 3. Найдем наибольший общий делитель многочленов $A = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ и $B = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

Применим алгоритм Евклида:

$$\begin{array}{r|l}
x^3+3x^2+3x+2 & x^3+2x^2+2x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+2x^2+2x+2} & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2+2x+1 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+x^2+x} & x+1 \\
x^2+x+1 & \\
\underline{x^2+x+1} & \\
0 &
\end{array}$$

Здесь вместо записи равенств (2) применена более короткая запись.

Искомый наибольший общий делитель данных многочленов есть последний неравный нулевому многочлену остаток в алгоритме Евклида, т. е.

$$\text{НОД}\,(A, B) = x^2 + x + 1.$$

ПРИМЕР 4. Найдем наибольший общий делитель многочленов $A = x^2 - x - 3$ и $B = x + 1$.

Применим алгоритм Евклида:

$$\begin{array}{r|l}
x^2-x-3 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^2+x} & x-2 \\
-2x-3 & \\
\underline{-2x-2} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
x+1 & -1 \\ \cline{2-2}
\underline{x+1} & -x-1 \\
0 &
\end{array}$$

Мы получили, что НОД $(A, B) = -1$, но тогда наибольший общий делитель многочленов A и B есть любое действительное отличное от нуля число. Принято писать, что НОД $(A, B) = 1$.

Разделите уголком многочлен A на многочлен B **(2.27—2.28)**, если:

2.27 а) $A = x^3 - x^2 + x + 3$, $B = x^2 - 2x + 3$;
б) $A = x^3 + x^2 + 3x - 5$, $B = x^2 + 2x + 5$;
в) $A = x^4 - 2x^3 + x^2 + 8x - 20$, $B = x^2 - 4$.

2.28 а) $A = x^5 - 1$, $B = x^3 - 1$;
б) $A = x^7 - 1$, $B = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

2.29 Найдите НОД (A, B), если:
а) $A = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $B = x^3 - x^2 + 1$;
б) $A = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $B = x^3 - 1$;
в) $A = x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2 - x$, $B = x^5 - x^4 + x^3 - x$;
г) $A = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x$, $B = x^2 - 4x + 3$.

2.30 Сократите дробь:
а) $\frac{x^3 - x^2 + x + 3}{x^2 - 2x + 3}$; б) $\frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x^2 + 2x + 5}$;
в) $\frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$; г) $\frac{x^3 + 8}{x^3 - 4x^2 + 8x - 8}$.

2.31 Докажите, что дробь несократима:
а) $\frac{x^4 + 1}{x^3 + 1}$; б) $\frac{x^3 + 9}{x^2 - 1}$.

2.32 Найдите многочлен A, для которого верно равенство:
а) $x^{12} - 1 = (x^4 - 1) \cdot A$; б) $x^{12} - 1 = (x^2 + 1) \cdot A$;
в) $x^{12} - 1 = (x^2 - 1) \cdot A$; г) $x^{12} - 1 = (x + 1) \cdot A$;
д) $x^{12} - 1 = (x - 1) \cdot A$; е) $x^5 - 32 = (x - 2) \cdot A$;
ж) $x^6 - 64 = (x - 2) \cdot A$; з) $x^7 - 128 = (x - 2) \cdot A$.

2.4*. Теорема Безу

Пусть $P_n(x)$ — многочлен относительно x степени n ($n \geqslant 1$), т. е.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — данные числа, причем $a_n \neq 0$. Если многочлен $P_n(x)$ разделить с остатком на двучлен $x - a$, то частное (неполное частное) есть многочлен $Q_{n-1}(x)$ степени $n - 1$, остаток R есть число, при этом справедливо равенство

$$P_n(x) = (x - a) Q_{n-1}(x) + R. \tag{2}$$

Из равенства (2) следует, что многочлен $P_n(x)$ делится нацело на двучлен $(x - a)$ только в случае $R = 0$.

ТЕОРЕМА Безу. Остаток R от деления многочлена (1) на двучлен $(x - a)$ равен значению многочлена $P_n(x)$ при $x = a$, т. е. $R = P_n(a)$.

Доказательство. Если в равенство (2) вместо x подставить число a, то получится, что $P_n(a) = R$, что и требовалось доказать.

Используя теорему Безу, равенство (2) можно записать в виде

$$P_n(x) = (x - a)\,Q_{n-1}(x) + P_n(a).$$

СЛЕДСТВИЕ. Для того чтобы многочлен (1) делился на двучлен $(x - a)$ нацело, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $P_n(a) = 0$.

Для нахождения частного $Q_{n-1}(x)$ и остатка R часто применяют метод деления уголком.

ПРИМЕР 1. Разделим многочлен $3x^3 - 2x - 20$ на двучлен $x - 2$:

$$\begin{array}{r|l}
3x^3 + 0x^2 - 2x - 20 & x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^3 - 6x^2} & 3x^2 + 6x + 10 \\
6x^2 - 2x & \\
\underline{6x^2 - 12x} & \\
10x - 20 & \\
\underline{10x - 20} & \\
0 &
\end{array}$$

Итак, $3x^3 - 2x - 20 = (3x^2 + 6x + 10)(x - 20)$. Многочлен $3x^3 - 2x - 20$ разделился на двучлен $x - 2$ нацело, получено частное $3x^2 + 6x + 10$ и остаток — нулевой многочлен.

Деление многочлена $A = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ на двучлен $(x - a)$ часто записывают короче с помощью таблицы — **схемы Горнера**. При этом, очевидно, коэффициент при старшем члене частного (неполного частного) всегда будет равен коэффициенту a_n при старшем члене данного многочлена. Как находятся другие коэффициенты частного (неполного частного), покажем на конкретном примере.

Разделим многочлен $3x^3 + 0x^2 - 2x - 20$ на двучлен $x - 2$ с помощью схемы Горнера. Запишем коэффициенты 3, 0, –2 и –20 данного многочлена в верхнюю строчку таблицы. Рядом с нижней строчкой таблицы запишем число $a = 2$. В нижней строке таблицы в результате вычислений получатся коэффициенты частного (неполного частного) и остаток.

Как уже сказано выше, коэффициент при старшем члене частного (неполного частного) будет равен коэффициенту 3 при старшем члене данного многочлена — число 3 сносим в нижнюю строчку таблицы. Далее 2 умножаем на 3 и прибавляем 0, результат 6 записываем в следующую клетку таблицы; 2 умножаем на 6 и прибавляем –2, результат 10 записываем в следующую клетку таблицы; 2 умножаем на 10 и прибавляем –20, результат 0 записываем в последнюю клетку таблицы. (Сравните выполняемые действия с вычислениями при делении уголком в примере 1.)

	3	0	–2	–20
2	3	6	10	0

Полученный результат означает, что коэффициенты частного при x^2, x и свободный член равны соответственно 3, 6, 10, а остаток равен 0, что подтверждает результат, полученный делением уголком.

ПРИМЕР 2. Найдем частное и остаток при делении многочлена $P_4(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ на двучлен $x - 3$.

Применив метод деления уголком или схему Горнера, получим

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1 = (x - 3)(x^3 + 5x^2 + 14x + 45) + 134,$$

и поэтому неполное частное есть многочлен

$$x^3 + 5x^2 + 14x + 45,$$

а остаток — число 134.

ПРИМЕР 3. Найдем частное и остаток при делении многочлена $P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на двучлен $x - 1$.

Применив метод деления уголком или схему Горнера, получим

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6),$$

и поэтому частное есть многочлен $x^2 - 5x + 6$, а остаток равен нулю.

Если требуется найти только остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x - a)$, то можно пользоваться теоремой Безу.

ПРИМЕР 4. Найдем остаток от деления многочлена $2x^4 - 3x^2 - x + 5$ на двучлен $x + 1$.

Па теореме Безу остаток R от деления многочлена $P_4(x) = 2x^4 - 3x^2 - x + 5$ на двучлен $x - (-1)$ равен значению многочлена $P_4(x)$ при $x = -1$, т. е.

$$R = P_4(-1) = 2 \cdot (-1)^4 - 3 \cdot (-1)^2 - (-1) + 5 = 5.$$

2.33 Разделите уголком и по схеме Горнера многочлен:

а) $3x^3 - 4x^2 - x - 6$ на $x - 1$; на $x - 2$; на $x - 3$;

б) $3x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 5$ на $x - (-1)$; на $x + 2$; на $x + 3$;

в) $x^4 - 81$ на $x + 3$; на $x - 3$; на $x + 1$.

2.34° Сформулируйте теорему Безу.

2.35 С помощью теоремы Безу найдите остаток от деления многочлена:

а) $3x^3 - 2x^2 - 4x - 5$ на $x - 1$; на $x - 2$; на $x - 3$;

б) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5$ на $x - (-1)$; на $x + 2$; на $x + 3$;

в) $x^4 - 16$ на $x + 2$; на $x - 2$; на $x + 1$.

2.36 С помощью теоремы Безу докажите, что многочлен:

а) $17x^3 - 13x^2 - 4$ делится на двучлен $x - 1$ без остатка;

б) $5x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 6$ делится на двучлен $x + 1$ без остатка;

в) $x^4 - 3x^2 - 4$ делится на двучлен $x + 2$ без остатка.

2.37 Найдите остаток от деления многочлена:

а) $(x - 4)^{30}$ на $x - 5$; на $x - 3$;

б) $(2x + 3)^9$ на $x + 2$; на $x + 1$;

в) $(3x + 8)^{2000}$ на $x + 3$.

2.38 Выясните, делится ли без остатка многочлен:

а) $12x^3 - 14x^2 + 2$ на двучлен $x - 1$;

б) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$ на двучлен $x - 2$;

в) $x^4 - x^3 + x^2 - x - 4$ на двучлен $x - 2$;

г) $x^4 - x^3 + x^2 - x - 4$ на двучлен $x + 1$.

2.5*. Корень многочлена

Число a называют **корнем многочлена $P_n(x)$**, если при $x = a$ значение многочлена $P_n(x)$ равно нулю: $P_n(a) = 0$, т. е. если многочлен $P_n(x)$ делится нацело на двучлен $x - a$.

Например, число 2 является корнем многочлена $P_3(x) = 3x^3 - 2x - 20$, так как $P_3(2) = 0$. Это означает, что разложение этого многочлена на множители содержит множитель $x - 2$ (см. пример 1 из п. 2.4):

$$P_3(x) = (x - 2)(3x^2 + 6x + 10).$$

Любой многочлен $P_n(x)$ степени $n \geqslant 1$ может иметь не более n действительных корней.

ПРИМЕРЫ.

1) Так как многочлен $P_2(x) = 3x^2 + 6x + 10 = 3(x + 3)^2 + 7 > 0$ для любого x, то этот многочлен не имеет действительных корней.

2) Многочлен $P_3(x) = 3x^3 - 24$ имеет только один действительный корень $x = 2$.

3) Многочлен $Q_2(x) = x^2 - 5x + 6$ имеет два действительных корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

ТЕОРЕМА 1. **Если все коэффициенты a_0, a_1, ..., a_n ($a_n \neq 0$) многочлена**

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

целые числа и рациональное число $\frac{p}{q}$ $\left(\frac{p}{q}\right.$ — несократимая дробь, $\left. p \in Z,\ q \in N\right)$ является корнем многочлена, то коэффициент a_0 делится на p, а коэффициент a_n делится на q.

Доказательство. Пусть рациональное число $\frac{p}{q}$ $\left(\frac{p}{q}\right.$ — несократимая дробь, $\left. p \in Z,\ q \in N\right)$ есть корень многочлена $P_n(x)$, т. е. пусть справедливо числовое равенство

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0. \qquad (2)$$

Умножим равенство (2) на q^n:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0. \qquad (3)$$

Все слагаемые в левой части равенства (3) — целые числа. Их сумма, а также сумма всех слагаемых, кроме последнего, делятся на p, следовательно, последнее слагаемое $a_0 q^n$ делится на p, но тогда a_0 делится на p, так как q^n не делится на p и числа p и q не имеют общих делителей, отличных от 1. Сумма всех слагаемых, а также сумма всех слагаемых, кроме первого, делятся на q, следовательно, первое слагаемое $a_n p^n$ делится на q, но тогда a_n делится на q, так как p^n не делится на q, что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 1. Выясним, какие рациональные корни имеет многочлен

$$P_3(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2. \qquad (4)$$

Пусть рациональное число $\frac{p}{q}$ $\left(\frac{p}{q}\right.$ — несократимая дробь, $p \in Z$, $\left. q \in N\right)$ есть корень многочлена $P_3(x)$. Тогда на основании теоремы 1 можно заключить, что $a_0 = 2$ делится на p, а $a_3 = 6$ делится на q. Значит, p равно одному из чисел 1, –1, 2, –2, а q равно одному из чисел 1, 2, 3, 6. Это означает, что если у многочлена (4) есть корень — рациональное число, то этот корень содержится среди чисел

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{6}.$$

Выясним, какие из этих 12 чисел являются корнями многочлена (4):

$$P_3(1) = 6 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 2 \neq 0,$$
$$P_3(-1) = 6 \cdot (-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 2 \neq 0,$$
$$P_3(2) = 6 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 2 \neq 0,$$
$$P_3(-2) = 6 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 - 9 \cdot (-2) + 2 = 0,$$

следовательно, числа 1, -1, 2 не являются корнями многочлена $P_3(x)$, а число -2 является корнем этого многочлена.

Поиск остальных рациональных корней многочлена $P_3(x)$ можно продолжить, подставляя оставшиеся восемь чисел в этот многочлен, но лучше разложить этот многочлен на множители:

$$P_3(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2 = (x + 2)(6x^2 - 5x + 1).$$

Многочлен $P_2(x) = 6x^2 - 5x + 1$ имеет корни $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$, следовательно, многочлен $P_3(x)$ имеет корни -2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и других корней не имеет.

Ответ. -2; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть коэффициент a_n многочлена с целыми коэффициентами

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

равен 1, тогда если этот многочлен имеет корень — рациональное число, то этот корень — целое число и является делителем свободного члена a_0.

Доказательство. Пусть многочлен

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

имеет корень — рациональное число $\frac{p}{q}$ $\left(\frac{p}{q}\right.$ — несократимая дробь, $\left.p \in \boldsymbol{Z},\ q \in \boldsymbol{N}\right)$. На основании теоремы 1 можно заключить, что коэффициент a_n, равный 1, делится на q и свободный член a_0 делится на p. Но тогда $q = 1$, т. е. корень есть целое число p и оно является делителем свободного члена a_0, что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 2. Выясним, какие рациональные корни имеет многочлен $P_4(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

Коэффициент a_4 этого многочлена равен 1, следовательно, если многочлен $P_4(x)$ имеет корни — рациональные числа, то эти числа целые и они являются делителями свободного члена 1, т. е. рациональные корни многочлена $P_4(x)$ следует искать среди чисел 1 и –1. Вычислим $P_4(1)$ и $P_4(-1)$:

$$P_4(1) = 1^4 - 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0,$$
$$P_4(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = 8 \neq 0.$$

Следовательно, многочлен $P_4(x)$ имеет единственный рациональный корень — число 1.

Ответ. 1.

Умение находить рациональные корни многочлена $P_n(x)$ с целыми коэффициентами помогает решать уравнения вида $P_n(x) = 0$.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$x^5 - x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0. \qquad (5)$$

Коэффициент a_5 многочлена

$$P_5(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 2$$

равен 1, следовательно, если многочлен $P_5(x)$ имеет корни — рациональные числа, то эти числа целые и являются делителями свободного члена –2, т. е. рациональные корни многочлена $P_5(x)$ следует искать среди чисел 1, –1, 2, –2. Так как $P_5(1) = 1 - 1 - 4 + 5 + 1 - 2 = 0$, то многочлен $P_5(x)$ имеет корень 1 и его можно разложить на множители. Разделив многочлен $P_5(x)$ на двучлен $x - 1$, получим

$$P_5(x) = P_4(x)(x - 1), \text{ где } P_4(x) = x^4 - 4x^2 + x + 2.$$

Так как $P_4(1) = 1 - 4 + 1 + 2 = 0$, то многочлен $P_4(x)$ имеет корень 1 и его разложение на множители имеет множитель $x - 1$.

Разделив многочлен $P_4(x)$ на двучлен $x - 1$, получим

$$P_4(x) = P_3(x)(x - 1), \text{ где } P_3(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2.$$

Вычислим $P_3(1)$, $P_3(-1)$, $P_3(2)$ и $P_3(-2)$:

$$P_3(1) = 1 + 1 - 3 - 2 = -3 \neq 0,$$
$$P_3(-1) = -1 + 1 + 3 - 2 = 1 \neq 0,$$
$$P_3(2) = 8 + 4 - 6 - 2 = 4 \neq 0,$$
$$P_3(-2) = -8 + 4 + 6 - 2 = 0.$$

Так как $P_3(-2) = 0$, то многочлен $P_3(x)$ имеет корень –2 и его разложение на множители имеет множитель $x + 2$.

Разделив многочлен $P_3(x)$ на двучлен $x + 2$, получим

$$P_3(x) = P_2(x)(x + 2), \text{ где } P_2(x) = x^2 - x - 1.$$

Корни многочлена $P_2(x)$ есть $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Следовательно, $P_2(x) = (x - x_1)(x - x_2)$.

Подводя итоги, получаем, что

$$P_5(x) = (x-1)^2(x+2)(x-x_1)(x-x_2).$$

Поэтому уравнение (5) имеет корни:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ x_3 = 1,\ x_4 = -2.$$

Очевидно, что других корней оно не имеет.

Ответ. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; 1; −2.

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9} = 0. \tag{6}$$

Умножая обе части уравнения (6) на 9, получим равносильное ему уравнение

$$9x^3 + 6x^2 - 1 = 0. \tag{7}$$

У многочлена $P_3(x) = 9x^3 + 6x^2 - 1$ коэффициент a_3 равен 9, а свободный член равен −1. Если уравнение (7) имеет корень — рациональное число $\frac{p}{q}$ $\left(\frac{p}{q}\text{ — несократимая дробь, } p \in \boldsymbol{Z},\ q \in \boldsymbol{N}\right)$, то 9 делится на q и −1 делится на p, но тогда рациональные корни уравнения (7) надо искать среди чисел 1, −1, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $-\frac{1}{9}$. Вычислим

$$P_3(1) = 9 + 6 - 1 = 14 \neq 0,$$
$$P_3(-1) = -9 + 6 - 1 = -4 \neq 0,$$
$$P_3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 1 = 0.$$

Так как $P_3\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, то многочлен $P_3(x)$ имеет корень $\frac{1}{3}$ и его разложение на множители имеет множитель $x - \frac{1}{3}$.

Разделив многочлен $P_3(x)$ на двучлен $x - \frac{1}{3}$, получим

$$P_3(x) = P_2(x)\left(x - \frac{1}{3}\right),\ \text{где } P_2(x) = 9x^2 + 9x + 3.$$

Так как $P_2(x)$ — многочлен второй степени и его дискриминант $D = -27 < 0$, то многочлен $P_2(x)$ не имеет действительных корней.

Поэтому уравнение (7) и, следовательно, уравнение (6) имеют единственный действительный корень $x_1 = \frac{1}{3}$.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

2.39° Что называют корнем многочлена $P_n(x)$, $n \geqslant 1$?

2.40 Определите, является ли число:
а) 0; б) –1; в) 2; г) –2; д) 3; е) 1
корнем многочлена $P_5(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$.
Какие множители содержит разложение многочлена $P_5(x)$ на множители? Выпишите все рациональные числа, среди которых следует искать корни многочлена $P_5(x)$. Какие из этих чисел являются корнями многочлена $P_5(x)$?

Разложите многочлен $P(x)$ на линейные множители, если это возможно **(2.41—2.42)**:

2.41 а) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$; б) $P(x) = 3x^3 - x^2 - 6x + 2$;
в) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$; г) $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + x - 4$.

2.42 а) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$;
б) $P(x) = x^4 - 8x^2 - 9$;
в) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$;
г) $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 8$.

2.43 Найдите все корни многочлена $P(x)$, если:
а) Многочлен $P(x) = x^3 - 5x^2 + ax + b$ делится на $x - 3$ без остатка, а при делении на $x + 3$ дает остаток –42.
б) Многочлен $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ делится на $x + 1$ без остатка, а при делении на $x + 2$ дает остаток –15.
в) Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 16$ делится на $x - 4$ без остатка, а при делении на $x + 1$ дает остаток 15.

2.6. Рациональные уравнения

Уравнение, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно x, называют **рациональным уравнением с неизвестным x.**

Например, уравнения $5x^6 - 9x^5 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$, $\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = 1 + x$ и $\frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{5x^3 - 2}{x^4 + 3}$ являются рациональными.

Напомним, что **корнем** (или **решением**) уравнения с неизвестным x называют число, при подстановке которого в уравнение вместо x получается верное числовое равенство. Решить уравнение — значит найти все его корни или показать, что их нет.

При решении рациональных уравнений приходится умножать или делить обе части уравнения на не равное нулю число, переносить члены уравнения из одной части в другую, применять правила сложения и вычитания алгебраических дробей. В результате будет получаться уравнение, равносильное предшествующему, т. е. уравнение, имеющее те же корни, и только их.

Уравнение вида

$$A(x) \cdot B(x) = 0,$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x, называют **распадающимся уравнением.**

Множество всех корней распадающегося уравнения есть объединение множеств всех корней двух уравнений $A(x) = 0$ и $B(x) = 0$.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$(x^2 - 5x + 6)(x^2 + x - 2) = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) распадается на два уравнения

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad (2)$$

и

$$x^2 + x - 2 = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (2) имеет корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, а уравнение (3) имеет корни $x_3 = -2$ и $x_4 = 1$. Значит, уравнение (1) имеет корни $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$, $x_4 = 1$ и других корней не имеет.

Ответ. -2; 1; 2; 3.

Уравнение вида

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0, \qquad (4)$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x, обычно решают по следующему правилу.

Находят корни уравнения $A(x) = 0$, затем проверяют, какие из них обращают в нуль и какие не обращают в нуль знаменатель $B(x)$. Те из них, которые не обращают в нуль знаменатель $B(x)$, и являются корнями уравнения (4), и других корней уравнение (4) не имеет.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$\frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - x - 6} = 0. \qquad (5)$$

Сначала решим уравнение

$$x^2 + 4x - 21 = 0. \qquad (6)$$

Оно имеет два корня $x_1 = 3$ и $x_2 = -7$. Подставив эти числа в знаменатель левой части уравнения (5), получим

$$x_1^2 - x_1 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0,$$
$$x_2^2 - x_2 - 6 = 49 + 7 - 6 = 50 \neq 0.$$

Это показывает, что число $x_1 = 3$ не является корнем уравнения (5), а число $x_2 = -7$ — корень этого уравнения.

Ответ. -7.

Уравнение вида

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)}, \tag{7}$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ и $D(x)$ — многочлены относительно x, обычно решают по следующему правилу.

Переносят все члены уравнения в одну сторону:

$$\frac{A(x)}{B(x)} - \frac{C(x)}{D(x)} = 0. \tag{8}$$

Пользуясь правилом вычитания алгебраических дробей, переписывают уравнение (8) в виде

$$\frac{A(x) \cdot D(x) - C(x) \cdot B(x)}{B(x) \cdot D(x)} = 0. \tag{9}$$

Решают уравнение $A(x) \cdot D(x) - C(x) \cdot B(x) = 0$ и отбирают из его корней те, которые не обращают в нуль знаменатель уравнения (9). Они и только они и будут корнями уравнения (7).

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = 2x + 3. \tag{10}$$

Перенеся все члены уравнения (10) в левую часть, получим уравнение

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} - \frac{2x + 3}{1} = 0. \tag{11}$$

Применяя правило вычитания алгебраических дробей, перепишем уравнение (11) в виде

$$\frac{x^2 - 5x + 6 - (2x + 3)(x - 3)}{x - 3} = 0.$$

Решим уравнение $x^2 - 5x + 6 - (2x + 3)(x - 3) = 0$.

Переписав это уравнение в виде $x^2 + 2x - 15 = 0$, найдем корни этого уравнения $x_1 = -5$ и $x_2 = 3$.

Число x_1 не обращает в нуль знаменатель $x - 3$, а число x_2 обращает. Следовательно, уравнение (10) имеет единственный корень $x = -5$.

Ответ. -5.

Замечание. Отклонение от сформулированного выше правила может привести к потере корней или к приобретению посторонних корней.

Найти корни рационального уравнения часто помогает замена неизвестного.

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$x^8 + 4x^6 - 10x^4 + 4x^2 + 1 = 0. \qquad (12)$$

Число 0 не является корнем уравнения (12), поэтому уравнение (12) равносильно уравнению

$$x^4 + 4x^2 - 10 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4} = 0. \qquad (13)$$

Обозначим $t = x^2 + \frac{1}{x^2}$, тогда $x^4 + \frac{1}{x^4} = t^2 - 2$ и уравнение (13) перепишется в виде

$$t^2 + 4t - 12 = 0. \qquad (14)$$

Уравнение (14) имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = -6$. Следовательно, все корни уравнения (14) найдем, объединив все корни двух уравнений:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \quad \text{и} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = -6.$$

Первое уравнение имеет два корня -1 и 1, а второе уравнение не имеет действительных корней, поэтому уравнение (12) имеет только два корня: -1 и 1.

Ответ. -1; 1.

Замечание. Уравнения, подобные рассмотренному в примере 4, называют **возвратными**. Их характерной особенностью является совпадение коэффициентов при слагаемых, сумма степеней которых равна степени многочлена. Так, в разобранном примере равны коэффициенты при x^8 и x^0, x^7 и x, x^6 и x^2, x^5 и x^3. Во всех подобных случаях замена переменной $t = x + \frac{1}{x}$ или $t = x^2 + \frac{1}{x^2}$ (как в примере 4) упрощает решение уравнения.

2.44° а) Какое уравнение называют рациональным уравнением с неизвестным x?

б) Что называют корнем уравнения с неизвестным x?

в) Что значит решить уравнение?

г) Как решают распадающиеся уравнения?

д) Как решают уравнения вида $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$, где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x?

Решите уравнение **(2.45—2.48)**:

2.45 а) $(x + 1)(2x - 3) = 0$; б) $(3x + 1)(x - 2) = 0$;

в) $(x^2 - 1)(x + 3) = 0$; г) $(x^2 - 4)(x + 1) = 0$.

2.46 а) $(x^2 - 7x + 10)(x^2 - 5x + 6) = 0$;
б) $(x^2 - x - 6)(x^2 + 2x - 15) = 0$;
в) $x^6 - 1 = 0$; г) $x^8 - 1 = 0$.

2.47 а) $\frac{x^2 - 5x}{2x + 1} = 0$; б) $\frac{x^2 + 4x}{2x + x^2} = 0$;
в) $\frac{x^2 - 5x}{2x - 6} = 1$; г) $\frac{x^2 + 17x + 72}{x + 9} = -1$.

2.48 а) $\frac{60}{20 + x} + \frac{60}{20 - x} = \frac{25}{4}$; б) $\frac{1}{5 - x} + \frac{90}{25 - x^2} = \frac{4 - x}{5 + x}$;
в) $\frac{3}{x^2 - 2x + 1} + \frac{2}{1 - x^2} = \frac{1}{x + 1}$; г) $\frac{2}{x^2 + 12x + 36} - \frac{12}{36 - x^2} = \frac{1}{x - 6}$.

Решите уравнение, используя замену неизвестного **(2.49—2.50)**:

2.49* а) $(x + 100)^2 - 2004(x + 100) - 2005 = 0$;
б) $(x^2 - x)^2 - 3(x^2 - x) + 2 = 0$;
в) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x - 1)^2 - 1 = 0$;
г) $(x^2 - 10x)^2 + 8(x - 5)^2 - 209 = 0$;
д) $\left(\frac{3x - 1}{x + 1}\right)^2 - \frac{27x - 9}{x + 1} + 14 = 0$; е) $3 \cdot \left(\frac{2x - 3}{x + 1}\right)^2 - \frac{44x - 66}{x + 1} + 7 = 0$;
ж) $\frac{x + 1}{x - 1} + \frac{6x - 6}{x + 1} - 5 = 0$; з) $\frac{28x - 70}{3x + 1} - \frac{21x + 7}{2x - 5} - 47 = 0$.

2.50* а) $2x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 2 = 0$; б) $3x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 3 = 0$;
в) $2x^8 - 3x^6 - x^4 - 3x^2 + 2 = 0$; г) $5x^8 - 4x^6 - 2x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

Из сборника задач П. А. Ларичева. Решите уравнение **(2.51—2.52)**:

2.51 а) $\frac{x}{x + 1} + \frac{x}{x - 1} = 2\frac{2}{3}$; б) $\frac{x}{x + 4} + \frac{x}{x - 4} = 5\frac{5}{9}$;
в) $\frac{x + 3}{x - 3} + \frac{x - 3}{x + 3} = 3\frac{1}{3}$; г) $\frac{5x + 7}{x - 2} - \frac{2x + 21}{x + 2} = 8\frac{2}{3}$.

2.52* а) $\frac{x}{x + a} + \frac{x}{x - a} = 2\frac{2}{3}$ б) $\frac{x}{a} + \frac{1}{ax - bx} + \frac{b}{a^2x - abx} = \frac{2}{a - b}$;
в) $\frac{2x}{x - b} + \frac{12x^2}{b^2 - x^2} = \frac{b - x}{x + b}$; г) $\frac{x + a}{x - a} + \frac{x - a}{x + a} = \frac{a(3x + 2a)}{x^2 - a^2}$,

где a и b — данные числа.

Решите уравнение **(2.53—2.55)**:

2.53 а) $x^3+6x^2+11x+6=0$; б) $x^3+2x^2-5x-6=0$;
в) $x^3-2x-4=0$; г) $x^3-6x-9=0$;
д) $x^4+x^3+5x^2+4x+4=0$; е) $x^5+3x^3+2x=0$.

2.54 а) $2x^3-x^2-2x+1=0$; б) $3x^3-x^2-12x+4=0$;
в) $3x^4-3x^3+4x^2-x+1=0$; г) $x^4-4x^3+12x-9=0$;
д) $2x^4+2x^3+5x^2+x+2=0$; е) $x^4-3x^3+6x-4=0$.

2.55 а) $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x-2}=0$; б) $\dfrac{x^3-7x+6}{x^2+x-6}=0$;
в) $\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{2x^3-x^2+2x-1}=0$; г) $\dfrac{3x^3+4x^2-5x-2}{3x^3+4x^2-5x+2}=0$.

2.7. Системы рациональных уравнений

Уравнение, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно x и y, называют **рациональным уравнением с двумя неизвестными x и y**. Если надо найти все пары чисел $(x; y)$, каждая из которых является решением каждого из данных уравнений с двумя неизвестными x и y, то говорят, что надо решить **систему уравнений с двумя неизвестными x и y** и каждую такую пару называют **решением** этой системы.

Неизвестные могут обозначаться и другими буквами.

Аналогично определяется система уравнений, число неизвестных в которой больше двух.

Если каждое решение первой системы уравнений является решением второй системы, а каждое решение второй системы уравнений является решением первой системы, то такие системы называют равносильными. В частности, равносильными считаются две системы, не имеющие решений.

Например, равносильны системы

$$\begin{cases} y=7-x \\ xy=10 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y=7-x \\ x(7-x)=10, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=-1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2+x+y=0. \end{cases}$$

Основным способом решения систем уравнений является **способ подстановки**.

ПРИМЕР 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-y=1 \\ 5x^2-4xy+3y^2=9. \end{cases} \tag{1}$$

Выразив y через x из первого уравнения системы (1), получим уравнение:

$$y=3x-1. \tag{2}$$

Подставив выражение $3x - 1$ вместо y во второе уравнение системы (1), получим уравнение относительно x:

$$5x^2 - 4x(3x - 1) + 3(3x - 1)^2 = 9. \qquad (3)$$

Решив уравнение (3), найдем его корни $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{6}{7}$. Подставив найденные числа x_1 и x_2 в уравнение (2), получим $y_1 = 2$ и $y_2 = \frac{11}{7}$.

Следовательно, система (1) имеет два решения: (1; 2) и $\left(\frac{6}{7}; \frac{11}{7}\right)$.

Ответ. (1; 2), $\left(\frac{6}{7}; \frac{11}{7}\right)$.

При решении систем иногда помогает сложение уравнений.

ПРИМЕР 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3xy = -2 \\ y^2 + 5xy = 11. \end{cases} \qquad (4)$$

Оставив без изменения первое уравнение системы и сложив первое уравнение со вторым, получим систему

$$\begin{cases} x^2 - 3xy = -2 \\ (x + y)^2 = 9, \end{cases} \qquad (5)$$

равносильную системе (4).

Множество решений системы (5) состоит из всех решений двух систем:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy = -2 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 - 3xy = -2 \\ x + y = -3. \end{cases}$$

Решив каждую из этих систем, найдем все решения системы (4): (2; 1), (–2; –1), $\left(\frac{1}{4}; 2\frac{3}{4}\right)$ и $\left(-\frac{1}{4}; -2\frac{3}{4}\right)$.

Ответ. (2; 1), (–2; –1), $\left(\frac{1}{4}; 2\frac{3}{4}\right)$ и $\left(-\frac{1}{4}; -2\frac{3}{4}\right)$.

Найти решения системы часто помогает введение новых неизвестных.

ПРИМЕР 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} xy - x + y = 1 \\ 2x^2y^2 - 3x^2 + 6xy - 3y^2 = 2. \end{cases} \qquad (6)$$

Обозначив $u = xy$, $v = x - y$, перепишем систему (6) в виде

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ 2u^2 - 3v^2 = 2. \end{cases} \qquad (7)$$

Решив систему (7) методом подстановки, найдем ее решения: $u_1 = 1$, $v_1 = 0$ и $u_2 = 5$, $v_2 = 4$. Следовательно, множество решений системы (6) состоит из всех решений двух систем:

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} xy = 5 \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Решив методом подстановки каждую из этих систем, найдем все решения системы (6): (1; 1), (–1; –1), (5; 1), (–1; –5).

Ответ. (1; 1), (–1; –1), (5; 1), (–1; –5).

Уравнение вида $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, где a, b, c — данные неравные нулю числа, называют **однородным уравнением** относительно неизвестных x и y.

Покажем на примере, как можно решать систему уравнений, в которой есть однородное уравнение.

ПРИМЕР 4. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 3y^2 = 0 \\ x^2 - 2x + y = -\dfrac{5}{4}. \end{cases} \tag{8}$$

Так как никакая пара $(x_0; 0)$ не является решением системы (8), то система (8) равносильна системе

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 4 \cdot \dfrac{x}{y} + 3 = 0 \\ x^2 - 2x + y = -\dfrac{5}{4}. \end{cases} \tag{9}$$

Обозначив $t = \dfrac{x}{y}$, перепишем первое уравнение системы (9) в виде

$$t^2 + 4t + 3 = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) имеет два корня $t_1 = -1$ и $t_2 = -3$, поэтому множество решений системы (8) состоит из всех решений двух систем:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = -1 \\ x^2 - 2x + y = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{y} = -3 \\ x^2 - 2x + y = -\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Решив каждую из этих систем, найдем все решения системы (8): (2,5; –2,5), (0,5; –0,5), $\left(\dfrac{5}{6}; -\dfrac{5}{18}\right)$, (1,5; –0,5).

Ответ. (2,5; –2,5), (0,5; –0,5), $\left(\dfrac{5}{6}; -\dfrac{5}{18}\right)$, (1,5; –0,5).

При решении некоторых систем помогает знание свойств симметрических многочленов.

ПРИМЕР 5. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^4 + y^4 = 97. \end{cases} \qquad (11)$$

Введем новые неизвестные $\alpha = x + y$ и $\beta = xy$, тогда, как показано в п. 2.1, $x^4 + y^4 = \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 2\beta^2$. Поэтому систему (11) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \alpha = 5 \\ \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 2\beta^2 = 97. \end{cases} \qquad (12)$$

Подставив 5 вместо α во второе уравнение системы (12), получим квадратное уравнение относительно β:

$$\beta^2 - 50\beta + 264 = 0,$$

имеющее корни $\beta_1 = 6$ и $\beta_2 = 44$.

Следовательно, множество решений системы (11) состоит из всех решений двух систем: $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 44. \end{cases}$

Первая система имеет два решения $x_1 = 2$, $y_1 = 3$ и $x_2 = 3$, $y_2 = 2$, а вторая система не имеет действительных решений.

Следовательно, система (11) имеет два решения: $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.

Ответ. (2; 3), (3; 2).

ПРИМЕР 6. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 256x^4 + 81y^4 = 97. \end{cases} \qquad (13)$$

Сделав замену $u = 4x$ и $v = -3y$, перепишем систему (13) в виде

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^4 + v^4 = 97. \end{cases} \qquad (14)$$

Как показано в примере 5, система (14) имеет два решения $u_1 = 2$, $v_1 = 3$ и $u_2 = 3$, $v_2 = 2$. Следовательно, система (13) имеет два решения: $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ и $\left(\frac{3}{4}; -\frac{2}{3}\right)$.

Ответ. $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, $\left(\frac{3}{4}; -\frac{2}{3}\right)$.

Решите систему уравнений (2.56—2.59):

2.56 а) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 12 \\ y - 2x = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 - 2xy + y^2 = 6 \\ x - 2y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x}{y+1} + \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{16}{3} \\ x + y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{y+1} + \dfrac{y-1}{x+1} = -2{,}3 \\ x + y = 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{y+2} + \dfrac{y-1}{x+2} = \dfrac{1}{4} \\ x + y = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y-3} + \dfrac{y+1}{x-3} = -\dfrac{2}{3} \\ x + y = 4. \end{cases}$

2.57 а) $\begin{cases} y^2 - 3xy = -2 \\ x^2 + 5xy = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 7xy = 18 \\ y^2 + 5xy = -9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 8y + 31 = 0 \\ y^2 - 2x - 14 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 6y + 14 = 0 \\ y^2 + 4x - 1 = 0. \end{cases}$

2.58 а) $\begin{cases} \dfrac{x}{x+3} + \dfrac{x+3}{x} = \dfrac{17}{4} \\ x^2 - 4xy + 4y^2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{y+1}{y+2} + \dfrac{y+2}{y+1} = \dfrac{25}{12} \\ x^2 - 2xy + y^2 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{2x+2y}{x-y} - \dfrac{3x-3y}{x+y} = 5 \\ x^2 + y^2 = 90; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{4x-4y}{x+y} + \dfrac{3x+3y}{x-y} = 13 \\ x^2 - y^2 = 12; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy + x + y = 5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy - x - y = 5; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x + y = xy \\ x^2 + y^2 = 4xy; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x - y = 0{,}25xy \\ x^2 + y^2 = 2{,}5xy. \end{cases}$

2.59* а) $\begin{cases} 9x^2 - 10xy + 4y^2 = 3 \\ 2xy - 3x + 2y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x^2 - 7xy + y^2 = 3 \\ xy + 4x - 2y = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + x + y = -\dfrac{5}{9}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \\ y^2 + x + y = \dfrac{5}{4}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^3 + y^3 = 35; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^3 - y^3 = 117; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 + y^3 = -1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^3 + y^3 = 8. \end{cases}$

2.8. Метод интервалов решения неравенств

Напомним, что **решением неравенства** с неизвестным x называют число, при подстановке которого в это неравенство вместо x получается верное числовое неравенство. Решить неравенство — значит найти все его решения или показать, что их нет.

В этом пункте будет рассмотрен общий способ решения неравенств вида

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) > 0 \quad (1)$$

и

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) < 0, \quad (2)$$

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, n — натуральное число ($n \geqslant 1$).

Отметим на оси Ox число x_0 (рис. 9).

Точка x_0 делит ось Ox на две части:

1) для любого x, находящегося справа от точки x_0, двучлен $x - x_0$ положителен;

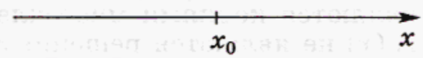


Рис. 9

2) для любого x, находящегося слева от точки x_0, двучлен $x - x_0$ отрицателен.

Это свойство двучлена лежит в основе метода интервалов.

Пусть, например, требуется решить неравенство

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) > 0 \quad (3)$$

или неравенство

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) < 0, \quad (4)$$

где $x_1 < x_2 < x_3$.

Отметим на оси Ox точки x_1, x_2, x_3 (рис. 10). Они делят ось Ox на четыре интервала: $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$.

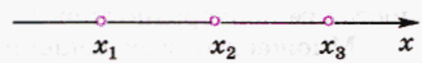


Рис. 10

Рассмотрим многочлен

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \quad (5)$$

Очевидно, что для любого x, находящегося справа от x_3, любой двучлен в произведении (5) положителен, так как точка x находится правее точек x_1, x_2, x_3. Поэтому и $A(x) > 0$ для любого x, принадлежащего интервалу $(x_3; +\infty)$.

Для любого x, находящегося между точками x_2 и x_3, последний множитель в произведении (5) отрицателен, так как x находится левее точки x_3, а любой из остальных множителей положителен, так как точка x находится правее точек x_1 и x_2. Поэтому и $A(x) < 0$ для любого x, принадлежащего интервалу $(x_2; x_3)$.

Аналогично рассуждая, получим, что $A(x) > 0$ для любого x из интервала $(x_1; x_2)$ и $A(x) < 0$ для любого x из интервала $(-\infty; x_1)$.

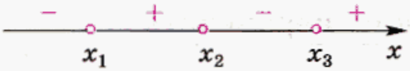


Рис. 11

На этом рассуждении основан **метод интервалов** решения неравенств (3) и (4), состоящий в следующем: на оси Ox отмечают точки x_1, x_2, x_3, над интервалом $(x_3; +\infty)$ ставят знак «+», над интервалом $(x_2; x_3)$ — знак «–», над интервалом $(x_1; x_2)$ — знак «+», над интервалом $(-\infty; x_1)$ — знак «–» (рис. 11).

Тогда множество решений неравенства (3) будет состоять из всех интервалов, над которыми поставлен знак «+», а множество решений неравенства (4) будет состоять из всех интервалов, над которыми поставлен знак «–».

Отметим, что сами числа x_1, x_2 и x_3 не являются решениями неравенств (3) и (4). Этим объясняется, что множества решений этих неравенств состоят из интервалов, а не из отрезков или полуинтервалов. Числа x_1, x_2, x_3 обращают в нуль многочлен (5). Эти числа являются корнями многочлена. Таким образом, корни многочлена $A(x)$ не являются решениями неравенств (3) и (4).

Подобным образом можно решать неравенства (1) и (2).

Отметим, что фактически этим же методом мы решали неравенства второй степени с положительным дискриминантом.

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$(x-1)(x-2)(x-3) > 0. \qquad (6)$$

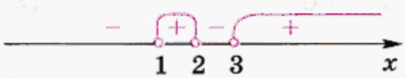


Рис. 12

Будем решать неравенство (6) методом интервалов. Отметим на оси Ox точки 1, 2, 3. Над интервалами $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$ справа налево поставим поочередно знаки «+» и «–», начиная со знака «+» (рис. 12).

Множество всех решений неравенства (6) состоит из объединения интервалов $(1; 2)$ и $(3; +\infty)$ (на рисунке 12 они показаны дугами).

Ответ. $(1; 2) \cup (3; +\infty)$.

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$(2-x)(x^2-4x+3)(x+1) > 0. \qquad (7)$$

Разложив квадратный трехчлен на множители, перепишем неравенство (7) в виде

$$(2-x)(x-1)(x-3)(x+1) > 0. \qquad (8)$$

Умножив неравенство (8) на –1, получим равносильное ему неравенство

$$(x-(-1))(x-1)(x-2)(x-3) < 0. \qquad (9)$$

Остается решить неравенство (9), которое мы записали в нужном для метода интервалов виде. Отметим на оси Ox точки –1, 1, 2, 3. Применяя метод интервалов, находим, что множество всех решений неравенства (9) или, что то же самое, неравенства (7) состоит из объединения интервалов $(-1; 1)$ и $(2; 3)$ (рис. 13).

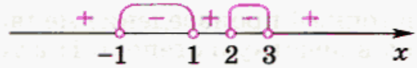


Рис. 13

Ответ. $(-1; 1) \cup (2; 3)$.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$(x-1)(x-2)(x^2+x+1) < 0. \qquad (10)$$

Так как дискриминант трехчлена $x^2 + x + 1$ отрицателен, то этот трехчлен положителен для всех действительных x. Поэтому неравенство (10) равносильно неравенству

$$(x-1)(x-2) < 0. \qquad (11)$$

Применяя метод интервалов, находим, что множество всех решений неравенства (11), а значит и неравенства (10), есть интервал $(1; 2)$.

Ответ. $(1; 2)$.

Рассмотрим решение неравенств вида (1) и (2), где не все x_1, x_2, ..., x_n различны. В этом случае произведение одинаковых двучленов обычно записывают в виде степени этого двучлена.

ПРИМЕР 4. Решим неравенство

$$(x-1)^3(x-2)^2(x-3)^4(x-4) < 0. \qquad (12)$$

Неравенство (12) нельзя решать, как предыдущие неравенства, так как некоторые из двучленов в левой части неравенства (12) возведены в степень, бо́льшую 1. Для решения таких неравенств обычно применяют **общий метод интервалов**, состоящий в следующем: отметим на оси Ox точки 1, 2, 3, 4, а затем в каждом из интервалов

$$(-\infty; 1),\ (1; 2),\ (2; 3),\ (3; 4),\ (4; +\infty) \qquad (13)$$

исследуем знак многочлена

$$A(x) = (x-1)^3(x-2)^2(x-3)^4(x-4). \qquad (14)$$

При исследовании знака многочлена над промежутком справа от наибольшего корня этого многочлена ставят знак «+», так как на этом промежутке все множители положительны. Затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной корень меняют знак, если соответствующий этому корню двучлен возведен в нечетную степень, и сохраняют знак, если он возведен в четную степень, так как знаки двучлена и его нечетной степени совпадают, а четная степень двучлена всюду положительна, кроме корня этого двучлена. Над каждым интервалом поставим найденный знак «+» или «−».

Исследуем знак многочлена (14) в каждом из интервалов (13). Над интервалами (13) должны стоять знаки, как на рисунке 14. Поскольку при $x > 4$ все множители положительны,

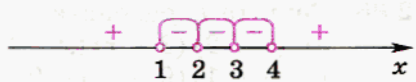


Рис. 14

в точке 4 произведение меняет знак, так как разность $(x-4)$ возведена в нечетную степень 1; в точках 3 и 2 произведение не меняет знака, поскольку разности $(x-3)$ и $(x-2)$ возведены в четную степень; в точке 1 произведение меняет знак, так как разность $(x-1)$ возведена в нечетную степень. Тогда множество всех решений неравенства (12) будет состоять из всех интервалов, над которыми поставлен знак «−». Поэтому множество всех решений неравенства (12) состоит из объединения трех интервалов (1; 2), (2; 3) и (3; 4) (рис. 14).

Ответ. $(1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; 4)$.

2.60° Определите знак выражения $x-5$, если:
а) $x>5$; б) $x<5$.

2.61° Определите знак выражения $x-(-2)$, если:
а) $x>-2$; б) $x<-2$.

2.62° Определите знак выражения $x+3$, если:
а) $x>-3$; б) $x<-3$.

2.63° Если $1<x<3$, то какой знак имеет двучлен:
а) $x-1$; б) $x-3$?

2.64° а) В чем заключается метод интервалов решения неравенств?
б) Какого вида неравенства решают этим методом?

2.65 Найдите все числа x, для каждого из которых

$$(x-1)(x-3)(x-5)=0.$$

Изобразите эти числа на координатной оси. Определите знак произведения $(x-1)(x-3)(x-5)$ на каждом из полученных интервалов. Укажите все значения x, для которых:
а) $(x-1)(x-3)(x-5)>0$; б) $(x-1)(x-3)(x-5)<0$.

2.66 По плану предыдущего задания решите неравенство:
а) $(x-1)(x-4)(x-9)>0$; б) $(x-(-1))(x-3)(x-5)<0$;
в) $(x+1)(x-1)(x-4)>0$; г) $(x+4)(x+2)(x-0)<0$;
д) $(x+5)(x+3)(x+1)>0$; е) $(x+4)(x+3)x<0$.

2.67 Решите неравенство методом интервалов:
а) $(x^2+x)(x-1)>0$; б) $(3x+12)(x^2-2x)<0$;
в) $(6x^2+12x)(x+4)<0$; г) $(2x^2-16x)(4x+4)>0$;
д) $(x^2-4)(x^2-1)>0$; е) $(x^2-25)(x^2-9)<0$;
ж) $(x^2+5x)(x^2-9)<0$; з) $(x^2+3x)(x^2-16)>0$.

2.68 Решите неравенство:
а) $(x+2)(3-x)(x+1)>0$; б) $(x+3)(2-x)(x+2)<0$;
в) $(x-1)(9-x^2)<0$; г) $(x-3)(4-x^2)>0$;
д) $(1-x)(2-x)(3-x)>0$; е) $(1+x)(3+x)(5+x)<0$.

2.69* Найдите все числа x, для каждого из которых

$$(x-1)(x-2)^2(x-3)=0.$$

Изобразите эти числа на координатной оси. Определите знак произведения $(x-1)(x-2)^2(x-3)$ на каждом из полученных интервалов. Укажите все значения x, для которых:

а) $(x-1)(x-2)^2(x-3)>0$; б) $(x-1)(x-2)^2(x-3)<0$.

2.70* По плану предыдущего задания решите неравенство:

а) $(x+3)^2(x+1)(x-2)>0$; б) $(x+4)(x+2)(x-3)^2<0$;

в) $(x+5)^2(x+3)(x-3)<0$; г) $(x+2)^2(x+5)(x-5)^2>0$;

д) $(x^2-4)(x-1)^2>0$; е) $(x^2-9)(x+2)^2<0$.

2.71* Решите неравенство с помощью общего метода интервалов:

а) $(x-1)^3(x+2)^2(x-4)>0$; б) $(x-3)^2(x-5)^3(x+1)<0$;

в) $(x+3)(x+4)^2(x+5)^3<0$; г) $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3>0$;

д) $(x+5)^5(x-2)^2(x+4)^4>0$; е) $(x+4)^4(x-3)^3(x+2)^2<0$.

2.72* Решите неравенство:

а) $(x^2-4)(x^2-5x+6)>0$;

б) $(x^2-1)(x^2-5x+4)<0$;

в) $(x^2-7x-8)(x^2+3x+2)>0$;

г) $(x^2-5x+6)(x^2-3x+2)<0$;

д) $x^3+x^2-8x-12>0$;

е) $x^3-4x^2-3x+18<0$;

ж) $x^4+5x^3+10x^2+20x+24>0$;

з) $x^4-x^3-5x^2-x-6<0$;

и) $(x^2+2x+2)(x-3)(x+4)>0$;

к) $(x^2+x+3)(x+3)(x-4)<0$.

2.9. Рациональные неравенства

Неравенство, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно x, называют **рациональным неравенством с неизвестным x.**

Например, являются рациональными неравенства

$$(x-1)(x+3)>0,\quad \frac{x-1}{x+3}<0,\quad \frac{x^2-5x+5}{x+1}>\frac{1}{x+5}+2.$$

При решении рациональных неравенств приходится умножать или делить обе части неравенства на не равное нулю число, переносить члены неравенства из одной части в другую, применять правила сложения и вычитания алгебраических дробей. В результате будет получаться неравенство, равносильное предшествующему, т. е. неравенство, имеющее те же решения, и только их.

Рассмотрим рациональное неравенство

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0, \qquad (1)$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x.

Легко видеть, что любое решение неравенства (1) есть решение неравенства

$$A(x) \cdot B(x) > 0. \qquad (2)$$

Действительно, если x_0 есть решение неравенства (1), то справедливо числовое неравенство $\frac{A(x_0)}{B(x_0)} > 0$, означающее, что числа $A(x_0)$ и $B(x_0)$ одного знака, т. е. что справедливо числовое неравенство $A(x_0) \cdot B(x_0) > 0$, а это означает, что x_0 есть решение неравенства (2). Аналогично показывается, что любое решение неравенства (2) есть решение неравенства (1). Следовательно, неравенства (1) и (2) равносильны.

Рассмотрим случай, когда многочлены $A(x)$ и $B(x)$ разлагаются в произведения **разных** двучленов вида $x - x_0$.

Все решения неравенства (1) можно получить, решив методом интервалов неравенство (2). Учитывая это обстоятельство, часто не переходят от неравенства (1) к неравенству (2), а говорят о применении метода интервалов к неравенству (1).

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$\frac{x-3}{x-2} > 0. \qquad (3)$$

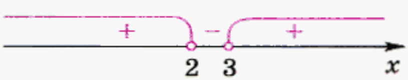


Рис. 15

Применяя метод интервалов (рис. 15), находим, что множество всех решений неравенства (3) состоит из объединения двух интервалов: $(-\infty; 2)$ и $(3; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x+2} < 0. \qquad (4)$$

Разложим на линейные множители квадратные трехчлены

$$x^2 - 2x - 3 \qquad (5)$$

и

$$x^2 - 3x + 2. \qquad (6)$$

Квадратный трехчлен (5) имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ и разлагается на линейные множители:

$$x^2 - 2x - 3 = (x - (-1))(x - 3).$$

Квадратный трехчлен (6) имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ и разлагается на линейные множители:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Следовательно, неравенство (4) можно переписать в виде

$$\frac{(x - (-1))(x - 3)}{(x - 1)(x - 2)} < 0.$$

Применяя метод интервалов (рис. 16), находим, что множество всех решений неравенства (4) состоит из объединения двух интервалов: $(-1; 1)$ и $(2; 3)$.

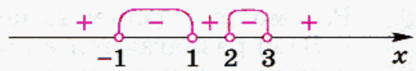


Рис. 16

Ответ. $(-1; 1) \cup (2; 3)$.

Пусть теперь даны алгебраические дроби $\frac{A_1(x)}{B_1(x)}$ и $\frac{A_2(x)}{B_2(x)}$, где $A_1(x)$, $B_1(x)$, $A_2(x)$, $B_2(x)$ — многочлены относительно x. Рассмотрим рациональное неравенство

$$\frac{A_1(x)}{B_1(x)} > \frac{A_2(x)}{B_2(x)}. \tag{7}$$

Для решения неравенства (7) надо перенести все его члены в левую часть, вычесть дроби в левой части и, не сокращая полученную дробь, привести неравенство (7) к виду

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0, \tag{8}$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x.

Затем решить неравенство (8). Так как неравенства (7) и (8) равносильны, то множества решений неравенств (7) и (8) одинаковы.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$\frac{x}{2x + 3} > \frac{1}{x}. \tag{9}$$

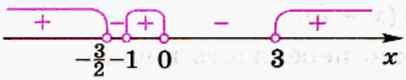
Перенося дробь $\frac{1}{x}$ в левую часть и вычитая эту дробь, получим неравенство

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x(2x + 3)} > 0, \tag{10}$$

равносильное неравенству (9). Разложив квадратный трехчлен $x^2 - 2x - 3$ на линейные множители, перепишем неравенство (10) в виде

$$\frac{(x + 1)(x - 3)}{\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 0)} > 0. \tag{11}$$

Применяя к неравенству (11) метод интервалов (рис. 17), получим, что множество всех его решений есть объединение интервалов:



$\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$, $(-1; 0)$ и $(3; +\infty)$.

Рис. 17

Ответ. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$.

Рассмотрим решение неравенства (1), когда многочлены $A(x)$ и $B(x)$ разлагаются в произведения двучленов $x - x_0$, где в числителе и знаменателе дроби имеются **одинаковые двучлены**. В этом случае лучше от неравенства (1) перейти к равносильному неравенству (2) и воспользоваться общим методом интервалов (см. п. 2.8).

ПРИМЕР 4. Решим неравенство

$$\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} < \frac{5x}{(x+3)(x-2)}. \qquad (12)$$

Перенеся все члены неравенства в левую часть и складывая дроби, получим неравенство

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{(x+3)(x-2)} < 0, \qquad (13)$$

равносильное неравенству (12). Разложив квадратный трехчлен $x^2 - 5x + 6$ на линейные множители, перепишем неравенство (13) в виде

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-2)} < 0. \qquad (14)$$

Теперь рассмотрим неравенство

$$(x-2)(x-3)(x+3)(x-2) < 0, \qquad (15)$$

равносильное неравенству (14). Перепишем его в виде

$$(x+3)(x-2)^2(x-3) < 0. \qquad (16)$$

Рис. 18

Применяя общий метод интервалов (рис. 18), получим, что множество всех решений неравенства (16), а значит, и равносильного ему неравенства (12) есть объединение двух интервалов $(-3; 2) \cup (2; 3)$.

Ответ. $(-3; 2) \cup (2; 3)$.

Решить неравенство иногда помогает введение нового неизвестного.

ПРИМЕР 5. Решим неравенство

$$x^2 + 5x + \frac{10}{x^2 + 5x + 6} < 0. \qquad (17)$$

Обозначив $t = x^2 + 5x + 6$, перепишем неравенство (17) в виде

$$\frac{t^2 - 6t + 10}{t} < 0. \qquad (18)$$

Так как $t^2 - 6t + 10 = (t - 3)^2 + 1 > 0$ для любых значений t, то все решения неравенства (18) есть все $t < 0$, следовательно, множество решений неравенства (17) есть множество всех решений неравенства $x^2 + 5x + 6 < 0$, т. е. множество $(-3; -2)$.

Ответ. $(-3; -2)$.

2.73° Какое неравенство называют рациональным неравенством с неизвестным x?

2.74 Изобразите на координатной оси все числа, обращающие числитель и знаменатель дроби $\frac{x-1}{x-2}$ в нуль. Определите знак дроби на каждом из полученных интервалов. Укажите все числа x, для каждого из которых:

а) $\frac{x-1}{x-2} > 0$; б) $\frac{x-1}{x-2} < 0$.

2.75 Решите с помощью метода интервалов неравенство:

а) $\frac{(x-3)(x-4)}{x-5} > 0$; б) $\frac{(x+3)(x+4)}{x+5} < 0$;

в) $\frac{(x+1)(x-1)}{x-3} < 0$; г) $\frac{(x-0)(x-3)}{x+4} > 0$;

д) $\frac{x}{(x-3)(x+4)} > 0$; е) $\frac{x}{(x+1)(x-8)} < 0$.

Решите неравенство **(2.76—2.78)**:

2.76 а) $\frac{3}{x-1} > x + 1$; б) $\frac{5}{x+2} < x - 2$; в) $\frac{2x-3}{x+1} > 1$;

г) $\frac{3x+2}{x-2} < 1$; д) $\frac{x}{4x-3} < \frac{1}{x}$; е) $\frac{x-5}{3x-9} > \frac{2}{x}$.

2.77 а) $\frac{(x-2)(x+3)}{x^2-4} < 0$; б) $\frac{x^2-9}{(x+3)(x-1)} > 0$;

в) $\frac{x^2+5x-6}{(x-1)(x+3)} > 0$; г) $\frac{x^2+4x+4}{(x+1)(x-3)} < 0$;

д) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9} < 0$; е) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} > 0$.

2.78 а) $\dfrac{(x-2)^2}{(x+1)(x-2)} > 0$; б) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+3)^2} < 0$;

в) $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} < 0$; г) $\dfrac{x^2-1}{(x+3)^2} > 0$;

д) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+2x-3} > 0$; е) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6} < 0$;

ж) $\dfrac{x^3-8}{x-2} < 0$; з) $\dfrac{x^3+1}{x+2} < 0$;

и) $\dfrac{x^3+27}{x+3} > 0$; к) $\dfrac{x^3-64}{x-3} > 0$.

2.79* а) $x^2-6x+\dfrac{17}{x^2-6x+8} < 0$; б) $x^2+2x+\dfrac{5}{x^2+2x-3} < 0$;

в) $x^2+3x+\dfrac{6}{x^2+3x-4} > 0$; г) $x^2-5x+\dfrac{7}{x^2-5x+4} > 0$.

2.10. Нестрогие неравенства

Рассмотрим решение нестрогих неравенств

$$\frac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0 \tag{1}$$

и

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leqslant 0, \tag{2}$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x.

Множество всех решений неравенства $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0$ есть объединение множества всех решений неравенства $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$ и множества всех решений уравнения $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$.

Аналогично множество всех решений неравенства $\dfrac{A(x)}{B(x)} \leqslant 0$ есть объединение множества всех решений неравенства $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0$ и множества всех решений уравнения $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$.

Заметим, что если многочлен $B(x)$, стоящий в знаменателе алгебраической дроби в неравенствах (1) и (2), есть число 1, то приведенные выше утверждения применимы и для решения неравенств $A(x) \geqslant 0$ и $A(x) \leqslant 0$, где $A(x)$ — многочлен относительно x.

ПРИМЕР 1. Решим неравенство
$$3x - 7 \geqslant 0. \qquad (3)$$
Сначала решим уравнение
$$3x - 7 = 0. \qquad (4)$$
Его единственное решение $x_0 = \frac{7}{3}$.

Затем решим неравенство
$$3x - 7 > 0. \qquad (5)$$
Множеством всех решений неравенства (5) являются все $x > \frac{7}{3}$. Объединяя множества всех решений неравенства (5) и уравнения (4), получаем, что множество всех решений неравенства (3) составляет полуинтервал $\left[\frac{7}{3}; +\infty\right)$.

Ответ. $\left[\frac{7}{3}; +\infty\right)$.

ПРИМЕР 2. Решим неравенство
$$2x^2 - x - 1 \leqslant 0. \qquad (6)$$
Сначала решим уравнение
$$2x^2 - x - 1 = 0. \qquad (7)$$
Оно имеет корни $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$.

Теперь решим неравенство
$$2x^2 - x - 1 < 0. \qquad (8)$$
Неравенство (8) можно записать в виде
$$2\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)(x - 1) < 0.$$

Решая его методом интервалов, получаем, что множество всех решений неравенства (8) составляет интервал $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. Объединяя множества всех решений неравенства (8) и уравнения (7), получаем, что множество всех решений неравенства (6) составляет отрезок $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ (рис. 19).

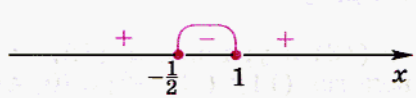


Рис. 19

Ответ. $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$9x^2 - 6x + 1 \leqslant 0. \tag{9}$$

Сначала решим уравнение

$$9x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Оно имеет единственный корень $x_0 = \frac{1}{3}$.

Теперь решим неравенство

$$9x^2 - 6x + 1 < 0. \tag{10}$$

Неравенство (10) можно записать в виде

$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 < 0.$$

Нет ни одного действительного числа x, удовлетворяющего этому неравенству, так как квадрат любого действительного числа не может быть отрицательным. Поэтому неравенство (10) не имеет решений.

Итак, неравенство (9) имеет единственное решение $x_0 = \frac{1}{3}$.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

ПРИМЕР 4. Решим неравенство

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)x} \leqslant 0. \tag{11}$$

Сначала решим уравнение

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)x} = 0. \tag{12}$$

Оно имеет только два корня $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$.

Теперь решим неравенство

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)x} < 0. \tag{13}$$

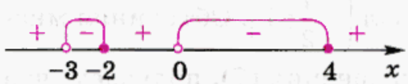


Рис. 20

Применяя метод интервалов, находим, что множество всех решений неравенства (13) состоит из двух интервалов: $(-3; -2)$ и $(0; 4)$. Объединяя множества всех решений неравенства (13) и уравнения (12), получаем множество всех решений неравенства (11): $(-3; -2] \cup (0; 4]$ (рис. 20).

Ответ. $(-3; -2] \cup (0; 4]$.

2.80° Как решают нестрогие неравенства?

2.81 Проверьте, является ли число 1 решением неравенства:
а) $3x - 1 \geqslant 0$; б) $3x - 5 \geqslant 0$; в) $2x - 2 \leqslant 0$;
г) $\frac{5x+2}{x-5} \leqslant 0$; д) $\frac{1-x}{x+1} \geqslant 0$; е) $\frac{x^2-1}{x-1} \leqslant 0$.

Решите неравенство (2.82—2.92):

2.82 а) $2x - 3 \leqslant 0$; б) $4x - 3 \geqslant 0$;
в) $5x - 8 \geqslant 3x - 1$; г) $2x - 4 \leqslant 4x - 3$.

2.83 а) $(x-2)(x+3) \geqslant 0$; б) $(x-2)(x+3) \leqslant 0$;
в) $(x-4)(x+3) \leqslant 0$; г) $(x+4)(x-3) \geqslant 0$.

2.84 а) $x^2 - 12x + 32 \leqslant 0$; б) $x^2 + 8x - 12 \leqslant 0$;
в) $2x^2 + x - 7 \geqslant 0$; г) $3x^2 - 5x - 1 \leqslant 0$.

2.85 а) $-x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$; б) $-x^2 + 4x - 4 \leqslant 0$;
в) $3x^2 + 18x + 27 \leqslant 0$; г) $2x^2 - 20x + 50 \geqslant 0$.

2.86 а) $x^2 - 3x + 5 \geqslant 0$; б) $x^2 + 7x + 10 \leqslant 0$;
в) $8x^2 - x + 1 \leqslant 0$; г) $4x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$.

2.87 а) $(x-1)(x-2)(x-3) \geqslant 0$; б) $(x-2)(x+2)(x-3) \leqslant 0$;
в) $(x+1)(x+2)(x+3) \leqslant 0$; г) $(x^2-4)(x+5) \geqslant 0$;
д) $(x^2+2x+1)(x-1) \leqslant 0$; е) $(x^2-6x+9)(x-2) \geqslant 0$.

2.88* а) $(x^2-1)(x+3) \geqslant 0$; б) $(12-5x)(x^2-4x+4) \geqslant 0$;
в) $(4-x^2)(7-x) \leqslant 0$; г) $(x^2-5x+6)(x-3) \leqslant 0$.

2.89* а) $(x-1)(x-2)^2 \leqslant 0$; б) $(x+1)(x+2)^2 \geqslant 0$;
в) $(x^2+2x+1)(x-1) \geqslant 0$; г) $(x^2-6x+9)(x-2) \leqslant 0$;
д) $(x^2-4x+3)(x^2-1) \geqslant 0$; е) $(x^2-3x+2)(x^2-4) \leqslant 0$.

2.90 а) $\frac{1}{x-1} \geqslant 0$; б) $\frac{5}{2-x} \leqslant 0$; в) $\frac{x-8}{2x+3} \geqslant 0$; г) $\frac{3-4x}{5+x} \leqslant 0$.

2.91* а) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-9} \geqslant 0$; б) $\frac{x^2-7x+10}{25-x^2} \leqslant 0$;
в) $1 - x \geqslant \frac{1}{x-3}$; г) $\frac{5}{x} - 4 \leqslant \frac{2x+3}{x-1}$.

2.92 а) $\frac{(1-x)(x+2)}{x-3} \leqslant 0$; б) $\frac{3-x}{(4-x)(x+5)} \geqslant 0$;
в) $x - 1 \geqslant \frac{x^2-5x-1}{x-1}$; г) $\frac{x^2-4x-1}{x-2} \leqslant x + 2$;
д) $\frac{2+x-x^2}{x-3} \leqslant 0$; е) $\frac{5-x}{x^2-2x-24} \geqslant 0$.

2.11. Системы рациональных неравенств

Если надо найти все числа x, каждое из которых есть решение одновременно всех данных неравенств, то говорят, что надо решить **систему неравенств с неизвестным x.**

Чтобы решить систему неравенств, надо решить каждое неравенство системы, затем найти общую часть (пересечение) полученных множеств решений, которая и будет множеством всех решений системы.

Рассмотрим примеры решения систем рациональных неравенств.

ПРИМЕР 1. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} (x-1)(x-5)(x-7) < 0 \\ \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-4} > 0. \end{cases} \qquad (1)$$

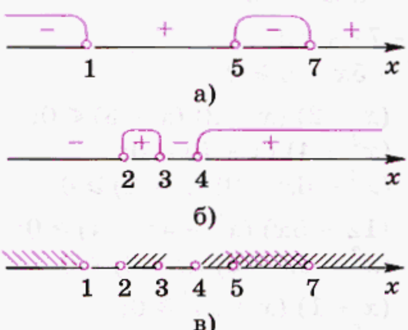


Рис. 21

Применяя метод интервалов, находим, что множество всех решений первого неравенства системы (1) состоит из объединения интервалов: $(-\infty; 1)$ и $(5; 7)$ (рис. 21, *а*), а множество всех решений второго неравенства системы (1) состоит из объединения интервалов: $(2; 3)$ и $(4; +\infty)$ (рис. 21, *б*). Следовательно, множество всех решений системы (1) составляет интервал $(5; 7)$ (рис. 21, *в*).

Ответ. $(5; 7)$.

ПРИМЕР 2. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 10 < 0 \\ \dfrac{x^9 - x^3 + x + 2}{x^4 - x^2 + 1} > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Выделим полный квадрат в трехчлене

$$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 + 1 = (x-3)^2 + 1.$$

Тогда первое неравенство системы (2) можно записать так:

$$(x-3)^2 + 1 < 0,$$

откуда видно, что оно не имеет решений.

Теперь можно не решать второе неравенство системы, так как ответ уже ясен: система неравенств (2) не имеет решений.

Ответ. Нет решений.

ПРИМЕР 3. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{x+3} \leqslant 0 \\ (x+1)(x-3)(x-6) < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Сначала решим первое неравенство системы (3). Множество всех его решений есть полуинтервал $(-3; 5]$.

Затем решим второе неравенство системы (3). Множество всех его решений состоит из объединения интервалов $(-\infty; -1)$ и $(3; 6)$.

Отметим на координатной оси все решения первого и второго неравенств (рис. 22).

Следовательно, множество всех решений системы (3) состоит из объединения промежутков $(-3; -1)$ и $(3; 5]$.

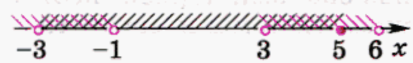


Рис. 22

Ответ. $(-3; -1) \cup (3; 5]$.

Рассмотрим задачи, решение которых можно свести к решению системы неравенств.

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$|x^2 - 4x| + |5x - x^2| = x. \tag{4}$$

Если x_0 — корень уравнения (4), то справедливо числовое равенство

$$|x_0^2 - 4x_0| + |5x_0 - x_0^2| = x_0. \tag{5}$$

Заметим, что сумма чисел $u = x_0^2 - 4x_0$ и $v = 5x_0 - x_0^2$, стоящих под знаком модуля, равна числу x_0, стоящему в правой части равенства (5), т. е. равенство (5) имеет вид

$$|u| + |v| = u + v. \tag{6}$$

Для чисел u и v равенство (6) справедливо тогда и только тогда, когда $u \geqslant 0$ и $v \geqslant 0$ одновременно. Это означает, что множество решений уравнения (4) состоит из всех решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4x \geqslant 0 \\ -x^2 + 5x \geqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

Множество всех решений первого неравенства системы (7) есть объединение двух промежутков $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$ (рис. 23, *а*).

Множество всех решений второго неравенства системы (7) есть промежуток $[0; 5]$ (рис. 23, *б*).

Общая часть всех решений этих двух неравенств и составляет множество всех решений системы (7), а значит и уравнения (4): $\{0\} \cup [4; 5]$ (рис. 23, *в*).

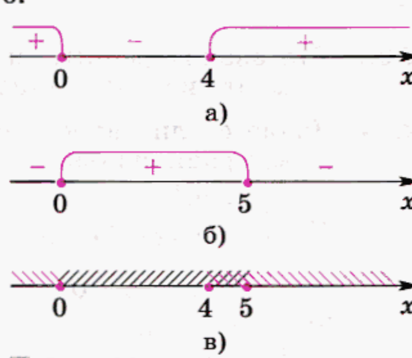


Рис. 23

Ответ. $\{0\} \cup [4; 5]$.

ПРИМЕР 5. Решим неравенство

$$\sqrt{x^2-5x+4}+\sqrt{-x^2+4x-3}\leqslant 3x-2. \qquad (8)$$

Если x_0 — решение неравенства (8), то справедливо числовое неравенство

$$\sqrt{x_0^2-5x_0+4}+\sqrt{-x_0^2+4x_0-3}\leqslant 3x_0-2.$$

Это означает, что числа $x_0^2-5x_0+4$ и $-x_0^2+4x_0-3$, стоящие под знаками корней, неотрицательны, т. е. число x_0 является решением системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-5x+4\geqslant 0\\ -x^2+4x-3\geqslant 0. \end{cases} \qquad (9)$$

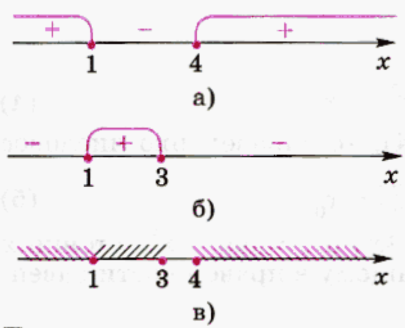


Рис. 24

Множество всех решений первого неравенства системы (9) есть объединение двух промежутков $(-\infty; 1]\cup$ $\cup[4; +\infty)$ (рис. 24, *а*), а множество всех решений второго неравенства системы (9) есть промежуток $[1; 3]$ (рис. 24, *б*). Поэтому общую часть всех решений этих двух неравенств и составляет единственное число $x_0 = 1$ (рис. 24, *в*).

Следовательно, если неравенство (8) имеет решение, то им может быть только число 1. Проверка показывает, что число 1 является решением неравенства (8).

Ответ. 1.

2.93° Что значит решить систему рациональных неравенств? Как решают системы рациональных неравенств?

2.94° Является ли какое-нибудь из чисел –1; 1; 0; 2 решением системы рациональных неравенств:

а) $\begin{cases} (x-3)^2>0\\ (x-2)(x-5)<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+5)^2>0\\ (x+4)(x-4)>0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-3x+5>0\\ \dfrac{1}{x-4}<2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-6x-8<0\\ \dfrac{x+4}{x}>5? \end{cases}$

Решите систему неравенств (2.95—2.100):

2.95 а) $\begin{cases}(x+1)(x-3)<0\\(x+2)(x-1)<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x(x+5)<0\\(x-1)(x-4)<0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}(x+2)(x+1)>0\\(x+6)(x-3)\leqslant 0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}(x-5)(x-3)>0\\(x+3)(x-4)\leqslant 0.\end{cases}$

2.96 а) $\begin{cases}(x-1)(x-2)<0\\x(x-3)>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+10)(x-13)>0\\(x+8)(x-12)<0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2-4\leqslant 0\\x\geqslant 9;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^2-9\geqslant 0\\x\leqslant -2.\end{cases}$

2.97 а) $\begin{cases}\dfrac{x-5}{x+2}<0\\\dfrac{x+7}{x-1}>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x+4}{x-2}<0\\\dfrac{x+8}{x-7}>0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2+4}\geqslant 0\\\dfrac{x-5}{x^2-4}<0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x^2+1}<0\\\dfrac{x-1}{x^2-4}\geqslant 0.\end{cases}$

2.98 а) $\begin{cases}x^2\geqslant 4\\\dfrac{x^2-9}{x^2-8x+19}\geqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2\leqslant 25\\\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-16}\leqslant 0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}(x-2)(x-3)\geqslant 0\\\dfrac{x+3}{x^2-4}\geqslant 0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}(x+2)(x+10)\leqslant 0\\\dfrac{x-2}{(x+1)(x+7)}\leqslant 0.\end{cases}$

2.99 а) $\begin{cases}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+1}>0\\x+3\leqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-1}\leqslant 0\\x+2<0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dfrac{x+3}{x^2-9}\leqslant 0\\\dfrac{x^2-4}{x+2}\geqslant 0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2-1}\leqslant 0\\\dfrac{x^2-16}{x-4}\geqslant 0.\end{cases}$

2.100 а) $\begin{cases}x^2-3x+4<0\\\dfrac{x^2-5x}{x+3}\geqslant 2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+5x-14>0\\\dfrac{2x^2+9x}{x+9}\leqslant 1{,}1;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dfrac{12}{20+x}+\dfrac{12}{20-x}\leqslant\dfrac{5}{4}\\x^2\leqslant 25;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{1}{5-x}+\dfrac{39}{25-x^2}\geqslant\dfrac{4-x}{5+x}\\x^2<49.\end{cases}$

2.101* При каких значениях a система неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 4x - 12 \geqslant 0 \\ |x - a| \leqslant 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 4x - 12 \leqslant 0 \\ |x - a| \leqslant 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - (a + 3)x + 3a \leqslant 0 \\ |x - 4| \geqslant 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - (a + 1)x + a \geqslant 0 \\ |x - 4| \leqslant 2 \end{cases}$

имеет единственное решение?

2.102* При каких значениях a система неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 \geqslant 0 \\ x^2 - (a + 4)x + 4a \leqslant 0 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение; б) не имеет решений; в) имеет бесконечно много решений?

2.103* При каких значениях a система неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \geqslant 0 \\ x^2 - (a + 5)x + 5a \leqslant 0 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение; б) не имеет решений; в) имеет бесконечно много решений?

2.104* Решите уравнение:

а) $|x^2 - 4x + 3| + |-x^2 + 5x - 4| = x - 1;$

б) $|x^2 - 5x + 6| + |-x^2 + 4x - 3| = 3 - x;$

в) $|x^2 - 10x + 24| + |x^2 - 9x + 20| = -x + 4;$

г) $|x^2 + 5x - 24| + |x^2 - 9x + 8| = 14x - 32;$

д) $\left|\dfrac{x}{x + 1} - 3x\right| + \left|\dfrac{x}{x + 1} + 2\right| = 3x + 2;$

е) $\left|\dfrac{x}{2x - 5} + x\right| + \left|\dfrac{x}{2x - 5} - 1\right| = x + 1.$

2.105* Докажите, что уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{1 - x^2} = 1 + x;$ б) $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{4 - x^2} = 2 - x;$

в) $\sqrt{x^2 + 2x - 8} + \sqrt{-x^2 + 3x - 2} = 3 - x;$

г) $\sqrt{x^2 - 6x + 5} + \sqrt{-x^2 + 7x - 12} = 4 + x$

не имеет решений.

2.106* Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 7x + 6} + \sqrt{-x^2 + 6x - 5} = |x| - 1;$

б) $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{-x^2 + 5x - 6} = 1 - |x|.$

2.107* Решите неравенство:

а) $\sqrt{x^2 + x - 12} + \sqrt{-x^2 + x + 6} \geqslant 9 - x^2;$

б) $\sqrt{x^2 - x - 12} + \sqrt{-x^2 - x + 6} \leqslant x^2 - 9.$

§ 3. Корень степени n

3.1. Понятие функции и ее графика

При рассмотрении количественных отношений явлений реального мира приходится иметь дело с числовыми значениями различных величин, например, времени, пути, скорости, объема, угла и т. д. В зависимости от рассматриваемых условий одни из величин всегда имеют постоянные числовые значения, у других — эти значения переменные. Такие величины называют соответственно постоянными и переменными. Например, при равномерном движении скорость v — постоянна, а время t и путь s — переменные, причем $s = vt$.

Изучение явлений реального мира показывает, что переменные величины не изменяются независимо друг от друга: изменение числовых значений одних влечет изменение значений других.

Будем рассматривать лишь пары переменных, значения одной из которых (зависимой) изменяются в зависимости от значений второй (независимой). В приведенном примере естественно считать t независимой переменной, s — зависимой, v — постоянной. Независимую переменную называют еще **аргументом**, зависимую переменную — **функцией**. Поэтому можно сказать, что в приведенном примере s есть функция t.

Приведем другие примеры.

1) Площадь круга S есть функция радиуса: $S = \pi R^2$ (π — постоянная).

2) Объем V некоторого количества газа есть функция давления этого газа p: $V = \frac{c}{p}$ (c — постоянная).

3) Длина катета прямоугольного треугольника с заданной гипотенузой есть функция угла α, лежащего против этого катета: $a = c \sin \alpha$ (c — длина гипотенузы).

Примеры, когда одна величина является функцией другой, можно продолжить. Принято говорить о функциях от аргумента, который может быть временем, радиусом, углом и т. д.

В математике принято рассматривать одну величину как функцию другой величины, не вникая в физическую сущность этих величин, и говорить о числовой функции числового аргумента. Вместо слов «числовая функция числового аргумента» будем говорить просто «функция».

Напомним определение функции. Оно предложено великим русским математиком Н. И. Лобачевским (1792—1856) и немецким математиком Л. Дирихле (1805—1859).

Пусть дано некоторое множество чисел X и пусть в силу некоторого вполне определенного закона (f) каждому числу x из множества X ставится в соответствие одно вполне определенное число y, тогда говорят, что на X задана функция $y = f(x)$.

Множество X называют **областью определения функции** $y = f(x)$. Множество всех значений зависимой переменной y называют **областью изменения функции** $y = f(x)$.

Таким образом, чтобы задать функцию, нужно указать способ (закон, правило) с помощью которого для каждого значения аргумента $x \in X$ можно найти соответствующее значение y. Обычно этот закон обозначают одной буквой, например f, и тогда пишут

$$y = f(x). \tag{1}$$

Иногда для того, чтобы подчеркнуть, что y зависит от x, пишут $y(x)$, а для сокращения записи (1) пишут $f(x)$.

Закон f также называют функцией и говорят: задана функция f на множестве чисел X или, коротко, задана функция f.

Отметим, что вместо пары букв x и y в определении функции могут участвовать любые другие пары букв. Например, функцию f, определенную на множестве X, можно записать в виде $y = f(x)$, $x \in X$, так и в виде $u = f(v)$, $v \in X$, или даже в виде $x = f(y)$, $y \in X$. Все эти записи характеризуют одну и ту же функцию.

Для области определения и области изменения функции f приняты обозначения $D(f)$ и $E(f)$ соответственно.

Приведем примеры функций.

1) Пусть каждому действительному числу x поставлено в соответствие число y, равное $3x$. Этим соответствием задана функция $y = 3x$ с областью определения $\boldsymbol{R}$.

2) Пусть каждому действительному числу x поставлено в соответствие число y, равное x^2. Этим соответствием задана функция $y = x^2$ с областью определения $\boldsymbol{R}$.

3) Пусть каждому действительному отличному от нуля числу x поставлено в соответствие число y, равное $\frac{1}{x}$. Этим соответствием задана функция $y = \frac{1}{x}$ с областью определения — множеством всех отличных от нуля действительных чисел.

4) Если каждому действительному числу x поставлено в соответствие одно и то же действительное число c, то говорят, что задана функция $y = c$ с областью определения $\boldsymbol{R}$.

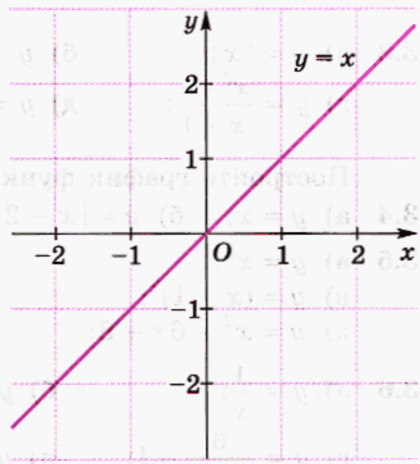
Говорят также, что в примерах 1—4 функции заданы формулами $y = 3x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = c$.

Кроме формулы, функцию можно задать и графиком. Каждая функция, заданная при помощи формулы, имеет в декартовой системе координат свой график.

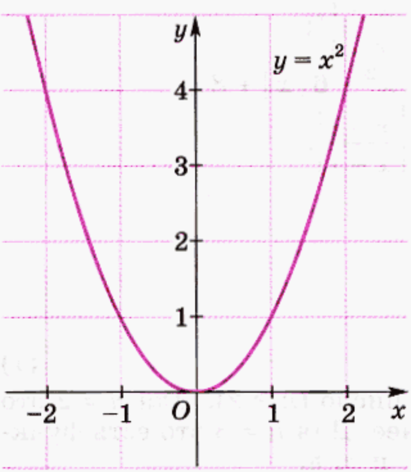
Графиком функции $y = f(x)$ называют множество всех точек координатной плоскости xOy вида $(x; f(x))$, где x — любое число из области определения функции.

Ранее уже строились графики функций $y = x$ (прямая), $y = x^2$ (парабола), $y = \frac{1}{x}$ (гипербола) (рис. 25, *а*—*в*).

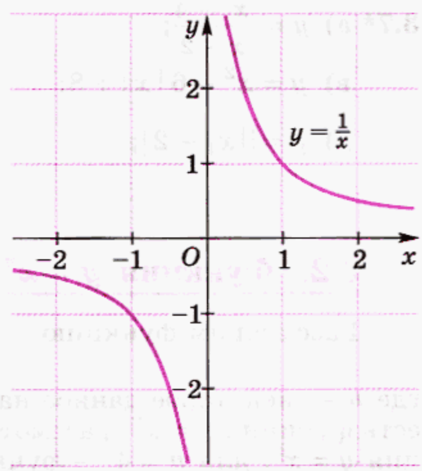
Если график функции $y = f(x)$ на некотором промежутке есть непрерывная линия, то функцию называют **непрерывной** на этом промежутке. Можно сказать и так: функцию называют непрерывной на промежутке, если она определена в каждой точке этого промежутка и малому изменению аргумента соответствует малое изменение функции. (Формальное определение непрерывности функции будет дано позже.) Приведем примеры: 1) функция $y = x$ непрерывна на промежутке $\boldsymbol{R}$; 2) функция $y = x^2$ непрерывна на промежутке $\boldsymbol{R}$; 3) функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна как на интервале $(-\infty; 0)$, так и на интервале $(0; +\infty)$. В точке $x = 0$ она не определена. Ее график состоит из двух ветвей.



а)



б)



в)

Рис. 25

3.1° а) Сформулируйте определение функции. Приведите примеры функций.

б) Что называют графиком функции $y = f(x)$?

в) Какую функцию называют непрерывной на промежутке? Приведите примеры.

Найдите область определения функции (3.2—3.3):

3.2 а) $y = x$; б) $y = 3x - 7$; в) $y = x^2$;

г) $y = 3x^2 - 6x + 1$; д) $y = \frac{1}{x}$; е) $y = \frac{4}{x-1} + 2$.

3.3 а) $y = |x|$; б) $y = |x - 2|$; в) $y = (x - 2)^2$;

г) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$; д) $y = \frac{|x|}{x}$; е) $y = \frac{5}{|x| - 2}$.

Постройте график функции (3.4—3.7):

3.4 а) $y = x$; б) $y = |x - 2|$; в) $y = |x + 2|$; г) $y = |x - 2| + 1$.

3.5 а) $y = x^2$; б) $y = x^2 - 4$;

в) $y = (x - 1)^2$; г) $y = (x - 3)^2 + 2$;

д) $y = x^2 - 6x + 8$; е) $y = |x^2 - 6x + 8|$.

3.6 а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = \frac{4}{x} + 2$; в) $y = \frac{6}{x - 2}$;

г) $y = \frac{6}{x + 1} - 1$; д) $y = \frac{4x + 2}{x + 1}$; е) $y = \frac{1}{|x|}$.

3.7* а) $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$; б) $y = \frac{|x - 1|}{x - 1}$;

в) $y = x^2 - 6|x| + 8$; г) $y = |x^2 - 6|x| + 8|$;

д) $y = ||x| - 2|$; е) $y = \left|\frac{x - 1}{x + 1}\right|$.

3.2. Функция $y = x^n$

Рассмотрим функцию

$$y = x^n, \tag{1}$$

где n — некоторое данное натуральное число ($n \geqslant 2$). Для $n = 2$ это есть функция $y = x^2$, рассмотренная ранее. Для $n = 3$ это есть функция $y = x^3$, для $n = 4$ — функция $y = x^4$ и т. д.

Функция $y = x^n$ определена для любых x, т. е. область определения этой функции есть множество $\boldsymbol{R}$.

Отметим свойства функции $y = x^n$ ($n \geqslant 2$) пока только для неотрицательных x.

1. Если $x = 0$, то $y = 0$.
2. Если $x = 1$, то $y = 1$.
3. Если $x > 0$, то $y > 0$.
4. Функция $y = x^n$ является возрастающей для $x \geqslant 0$.
5. Если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$.
6. Функция $y = x^n$ непрерывна.

Свойства 1 и 2 непосредственно следуют из формулы (1). Они означают, что график функции $y = x^n$ проходит через начало координат и точку (1; 1).

Свойство 3 следует из того, что если $x > 0$, то $x^n > 0$.

Свойство 3 означает, что график функции $y = x^n$ для $x > 0$ расположен выше оси Ox.

Свойство 4 следует из того, что если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то $x_1^n < x_2^n$.

Свойство 5 очевидно. В самом деле, если x стремится к $+\infty$, пробегая натуральные числа 1, 2, 3, ..., то $y = x^n$ тоже стремится к $+\infty$, пробегая числа 1^n, 2^n, 3^n, ... Для остальных чисел x справедливость этого свойства сохраняется.

Свойство 6 для $n = 2$ становится очевидным, если, например, считать, что y есть площадь квадрата со стороной x. Ясно, что малое изменение стороны квадрата влечет за собой малое изменение его площади, а это и означает непрерывность функции $y = x^2$ для положительных x.

Для $n = 3$ свойство 6 также становится очевидным, если, например, считать, что y есть объем куба с ребром x. Ясно, что малое изменение ребра куба влечет за собой малое изменение его объема, а это и означает непрерывность функции $y = x^3$ для положительных x.

Для других n свойство 6 надо доказывать, но это доказательство мы проводить не будем.

Свойство 6 означает, что график функции $y = x^n$ — непрерывная линия.

Отметим еще, что на интервале (0; 1) выполняются неравенства

$$1 > x > x^2 > x^3 > x^4 > \dots . \qquad (2)$$

Действительно, умножая неравенство $1 > x$ на $x > 0$, получим неравенство $x > x^2$; умножая это неравенство на $x > 0$, получим неравенство $x^2 > x^3$ и т. д.

В силу неравенств (2) график функции $y = x^3$ на интервале (0; 1) расположен ниже графика функции $y = x^2$, график функции $y = x^4$ расположен ниже графика функции $y = x^3$ и т. д.

Далее, на интервале (1; $+\infty$) выполняются неравенства

$$1 < x < x^2 < x^3 < x^4 < \dots . \qquad (3)$$

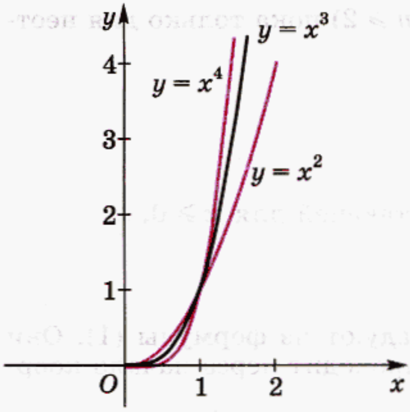


Рис. 26

Действительно, умножая неравенство $1 < x$ на $x > 0$, получим неравенство $x < x^2$; умножая это неравенство на $x > 0$, получим неравенство $x^2 < x^3$ и т. д.

Неравенства (3) показывают, что на интервале $(1; +\infty)$ график функции $y = x^3$ расположен выше графика функции $y = x^2$, график функции $y = x^4$ расположен выше графика функции $y = x^3$ и т. д.

На рисунке 26 в одной и той же декартовой системе координат изображены графики функций $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ пока только для неотрицательных значений x. Эти графики отражают отмеченные выше свойства функций.

Рассмотрим теперь свойства функции $y = x^n$ на всей ее области определения, т. е. для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

Очевидно, что

$$(-x)^2 = x^2, \quad (-x)^4 = x^4, \quad (-x)^6 = x^6, \quad (-x)^8 = x^8.$$

Вообще, если $n = 2m$ ($m \in N$) есть четное натуральное число, то $(-x)^{2m} = x^{2m}$.

Действительно,

$$(-x)^{2m} = ((-x)^2)^m = (x^2)^m = x^{2m}.$$

Следовательно,

при четном n функция $y = x^n$ четная и ее график симметричен относительно оси Oy.

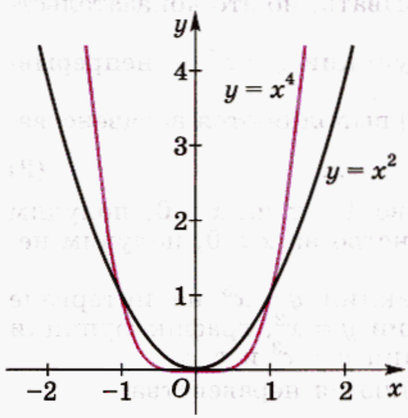


Рис. 27

Напомним, что функцию $f(x)$ называют **четной**, если для любого x из ее области определения верно равенство $f(-x) = f(x)$.

На рисунке 27 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = x^4$ для любых действительных значений x.

Для функций вида $y = x^n$ с нечетными показателями степеней выполняются уже другие равенства: $(-x)^3 = -x^3$, $(-x)^5 = -x^5$, $(-x)^7 = -x^7$.

Вообще если $n = 2m + 1$ ($m \in N$) есть нечетное натуральное число, то $(-x)^{2m+1} = -x^{2m+1}$.

Действительно, $(-x)^{2m+1} = (-x)^{2m} \cdot (-x) = x^{2m} \cdot (-1) \cdot x = -x^{2m+1}$.
Следовательно,

при нечетном n функция $y = x^n$ нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.

Напомним, что функцию $f(x)$ называют **нечетной**, если для любого x из ее области определения верно равенство $f(-x) = -f(x)$.

На рисунке 28 изображены графики функций $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ для любых действительных значений x.

Отметим, что если $n = 2m$ ($m \in N$) есть четное натуральное число, то функция $y = x^{2m}$ является убывающей на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастающей на промежутке $[0; +\infty)$. Эта функция принимает все значения из промежутка $[0; +\infty)$.

Если же $n = 2m + 1$ ($m \in N$) есть нечетное натуральное число, то функция $y = x^{2m+1}$ является возрастающей на промежутке $(-\infty; +\infty)$, она принимает все значения из промежутка $(-\infty; +\infty)$.

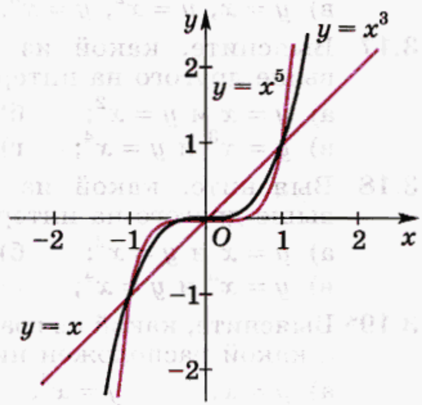


Рис. 28

3.8° а) Какова область определения функции $y = x^n$?
б) Сформулируйте свойства функции $y = x^n$.

3.9° Для каких натуральных значений n функция $y = x^n$:
а) четная; б) нечетная?

3.10 Какие точки принадлежат всем графикам функций $y = x^n$ при:
а) любых натуральных n; б) любых четных n;
в) любых нечетных n?

3.11 Какова область значений функции $y = x^n$ при:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) n четном; г) n нечетном?

3.12 В каких четвертях расположен график функции $y = x^n$ при:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 5$;
г) $n = 6$; д) n четном; е) n нечетном?

3.13 Относительно чего симметричен график функции $y = x^n$ при:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 5$;
г) $n = 6$; д) n четном; е) n нечетном?

3.14 На каком промежутке возрастает функция:

а) $y = x$; б) $y = x^3$; в) $y = x^5$;
г) $y = x^2$; д) $y = x^4$; е) $y = x^6$?

3.15 На каком промежутке убывает функция:

а) $y = x^2$; б) $y = x^4$; в) $y = x^8$?

3.16 В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$;
б) $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$;
в) $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$.

3.17 Выясните, какой из графиков двух функций расположен выше другого на интервале $(0; 1)$:

а) $y = x$ и $y = x^2$; б) $y = x^2$ и $y = x^3$;
в) $y = x^3$ и $y = x^4$; г) $y = x^4$ и $y = x^5$.

3.18 Выясните, какой из графиков двух функций расположен выше другого на интервале $(1; +\infty)$:

а) $y = x$ и $y = x^2$; б) $y = x^2$ и $y = x^3$;
в) $y = x^3$ и $y = x^4$; г) $y = x^4$ и $y = x^5$.

3.19* Выясните, какой из графиков трех функций расположен выше, а какой расположен ниже других на интервале $(-1; 0)$:

а) $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$;
б) $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$.

3.20* Выясните, какой из графиков трех функций расположен выше, а какой расположен ниже других на интервале $(-\infty; -1)$:

а) $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$;
б) $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$.

3.21* Найдите все значения x, при каждом из которых выполняется неравенство:

а) $x < x^3 < x^5$; б) $x > x^3 > x^5$; в) $x^2 < x^4 < x^6$;
г) $x^2 > x^4 > x^6$; д) $x^2 < x^3$; е) $x^2 > x^3$?

3.22 Постройте график функции:

а) $y = x^{12}$; б) $y = x^{21}$; в) $y = x^{40}$; г) $y = x^{55}$.

3.3. Понятие корня степени n

Пусть дано натуральное число n, большее или равное 2 ($n \geqslant 2$).

Корнем степени n из числа b называют такое число a (если оно существует), n-я степень которого равна b.

Мы уже знаем, что корень 2-й степени называют также **квадратным корнем**.

Корень 3-й степени называют еще **кубическим корнем**.

ПРИМЕР 1. Равенства $0^3 = 0$, $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $(-1)^3 = -1$, $(-2)^3 = -8$, $(-3)^3 = -27$ показывают, что числа -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 есть кубические корни соответственно из чисел -27, -8, -1, 0, 1, 8, 27.

ПРИМЕР 2. Равенства $0^5 = 0$, $1^5 = 1$, $2^5 = 32$, $3^5 = 243$, $(-1)^5 = -1$, $(-2)^5 = -32$, $(-3)^5 = -243$ показывают, что числа -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 есть корни пятой степени соответственно из чисел -243, -32, -1, 0, 1, 32, 243.

ПРИМЕР 3. Равенства $0^4 = 0$, $1^4 = 1$, $2^4 = 16$, $3^4 = 81$, $(-1)^4 = 1$, $(-2)^4 = 16$, $(-3)^4 = 81$ показывают, что есть два числа 1 и -1, которые являются корнями четвертой степени из 1; есть два числа 2 и -2, являющиеся корнями четвертой степени из 16; есть также два числа 3 и -3, являющиеся корнями четвертой степени из 81. Далее, 0 есть корень четвертой степени из 0.

Не существует корня четвертой степени из отрицательного числа, потому что четвертая степень любого действительного числа есть число неотрицательное.

В следующем пункте будут получены общие заключения, которые согласуются с рассмотренными выше частными фактами.

3.23° Что называют:
а) квадратным корнем; б) кубическим корнем;
в) корнем пятой степени; г) корнем n-й степени
из числа b?

3.24 а) Сколько существует корней четвертой степени из числа: 1; 81; 0; 625?
б) Сколько существует корней пятой степени из числа: 0; 1; –1?

3.25 а) Выпишите все натуральные числа, кубы которых не превышают 10 000.
б) Выпишите все целые числа, четвертые степени которых не превышают 100 000.

3.26 Сколько существует натуральных чисел, шестая степень которых не превышает 1 000 000?

3.27 Найдите ребро куба, если его объем равен:
а) 1 м^3; б) 8 см^3; в) 27 дм^3;
г) 64 мм^3; д) 1000 км^3; е) 1 000 000 м^3.

3.28° Найдите число, куб которого равен:

а) -1; б) -8; в) $0{,}001$; г) $\frac{1}{27}$.

3.29 Докажите, что число:

а) 3 есть корень третьей степени из 27;

б) $-0{,}5$ есть корень четвертой степени из $0{,}0625$;

в) 7 — корень четвертой степени из 2401;

г) $-1\frac{1}{3}$ — корень третьей степени из $-2\frac{10}{27}$.

3.30 Проверьте, является ли число:

а) 6 корнем шестой степени из 46 656;

б) -3 корнем седьмой степени из 2187;

в) -3 корнем седьмой степени из -2187;

г) $-0{,}4$ корнем пятой степени из $\frac{32}{3125}$.

3.31 Найдите кубический корень из числа:

а) 1000; б) 64 000 000; в) 125 000 000 000;

г) $-0{,}001$; д) $3\frac{3}{8}$; е) $-1\frac{61}{64}$.

Докажите правильность решения.

3.32 Найдите корень четвертой степени из числа:

а) 0; б) 160 000; в) 62 500 000 000;

г) $0{,}0001$; д) $1 \cdot 10^{-12}$; е) $1{,}6 \cdot 10^{-3}$.

Единственный ли это корень?

3.33 Существует ли корень шестой степени из числа:

а) 1; б) 0; в) -1; г) $1{,}2$; д) $-1{,}8 \cdot 10^{6}$; е) $7{,}2 \cdot 10^{-6}$?

Единственный ли это корень (если он существует)?

3.4. Корни четной и нечетной степеней

ТЕОРЕМА 1. Существует, и притом единственный, корень нечетной степени из любого действительного числа b, при этом корень нечетной степени: а) из положительного числа есть число положительное; б) из отрицательного числа есть число отрицательное; в) из нуля есть нуль.

Доказательство. Применим графический метод. Отметим, что любое нечетное число, большее 1, можно записать в виде $2m + 1$, где m — натуральное число.

Построим в прямоугольной системе координат xOy график функции $y = x^{2m+1}$ (рис. 29). Эта функция возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$, принимая все значения от $-\infty$ до $+\infty$, ее график — непрерывная кривая, проходящая через начало координат, симметричная относительно начала координат.

Зададим произвольное число b. Через точку $B(0; b)$ проведем прямую $y = b$, параллельную оси Ox. Она пересекает график функции $y = x^{2m+1}$ в одной и только в одной точке M, что следует из возрастания функции $y = x^{2m+1}$. Точка M имеет ординату $y = b$. Абсциссу ее обозначим через $x = a$.

Таким образом, полученное число a есть единственное число, для которого выполняется равенство $a^{2m+1} = b$.

Если $b > 0$, то $a > 0$ (см. рис. 29). Если $b < 0$, то $a < 0$ (рис. 30).

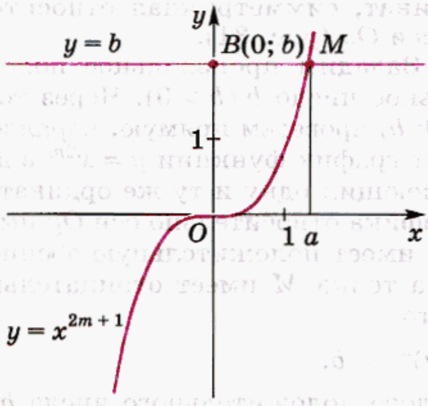


Рис. 29

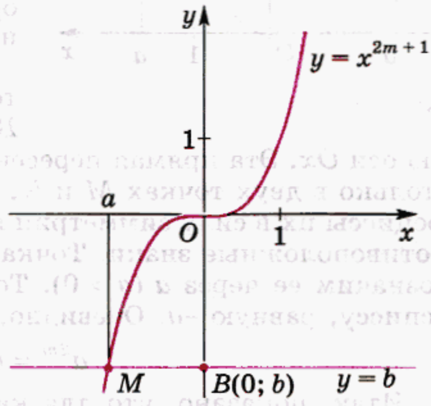


Рис. 30

Наконец, если $b = 0$, то и $a = 0$.

Итак, показано, что для любого действительного числа b существует, и притом один, корень степени $2m + 1$, который обозначается как $\sqrt[2m+1]{b}$.

Теорема 1 доказана.

ПРИМЕРЫ.

$$\sqrt[3]{8} = 2, \quad \sqrt[3]{-8} = -2, \quad \sqrt[5]{100\,000} = 10, \quad \sqrt[5]{-100\,000} = -10.$$

ТЕОРЕМА 2. **Существуют два и только два корня четной степени из любого положительного числа, которые отличаются только знаками. Корень четной степени из нуля единственный и равен нулю. Корня четной степени из отрицательного числа не существует.**

Доказательство. Отметим, что всякое положительное четное число можно записать в виде $2m$, где m — натуральное число. Если любое число, отличное от нуля, возвести в четную степень $2m$, то получится положительное число. Если же нуль возвести в степень $2m$, то получится нуль. Это и доказывает, что корень степени $2m$ из нуля единственный, равный нулю и что корня четной степени из отрицательного числа не существует.

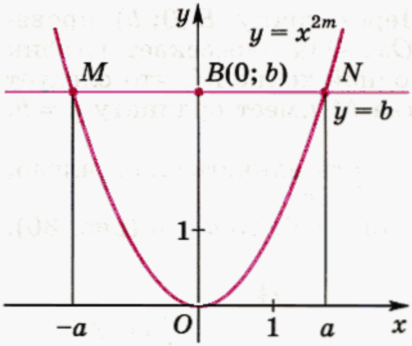


Рис. 31

Чтобы доказать первое утверждение теоремы, применим графический метод. Рассмотрим функцию $y = x^{2m}$. Она возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, принимая все значения от 0 до $+\infty$, и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, принимая все значения от $+\infty$ до 0. Ее график — непрерывная кривая, проходящая через начало координат, симметричная относительно оси Oy (рис. 31).

Зададим произвольное положительное число b $(b > 0)$. Через точку $B\,(0;\, b)$ проведем прямую, параллельную оси Ox. Эта прямая пересекает график функции $y = x^{2m}$ в двух и только в двух точках M и N, имеющих одну и ту же ординату b. Абсциссы их в силу симметрии графика относительно оси Oy имеют противоположные знаки. Точка N имеет положительную абсциссу, обозначим ее через a $(a > 0)$. Тогда точка M имеет отрицательную абсциссу, равную $-a$. Очевидно, что

$$a^{2m} = (-a)^{2m} = b.$$

Итак, показано, что для каждого положительного числа b существуют два и только два корня степени $2m$ из b. Один из них — положительный — обозначают как $\sqrt[2m]{b}$, другой — отрицательный — обозначают так: $(-\sqrt[2m]{b})$.

Корень степени $2m$ из нуля (как показано выше, единственный равный нулю) обозначают как $\sqrt[2m]{0} = 0$.

Теорема 2 доказана.

ПРИМЕРЫ.

$$\sqrt[4]{16} = 2, \quad -\sqrt[4]{16} = -2, \quad \sqrt{0} = 0,$$
$$\sqrt[6]{1\,000\,000} = 10, \quad -\sqrt[6]{1\,000\,000} = -10.$$

Отметим, что записи $\sqrt{-16}$, $\sqrt[4]{-81}$, $\sqrt[6]{-1\,000\,000}$, $\sqrt[4]{-13{,}2}$, $\sqrt[8]{-0{,}1}$ не имеют смысла, потому что корень четной степени из отрицательного числа не существует.

Подведем итоги. Пусть m — данное натуральное число.

Существует, и притом только один, корень степени $2m + 1$ из любого действительного числа b. Его обозначают $\sqrt[2m+1]{b}$, причем:

если $b > 0$, то $\sqrt[2m+1]{b} > 0$,

если $b = 0$, то $\sqrt[2m+1]{b} = 0$,

если $b < 0$, то $\sqrt[2m+1]{b} < 0$.

Существуют два и только два корня степени $2m$ из любого положительного числа b, они отличаются только знаками.

Положительный корень обозначают $\sqrt[2m]{b}$, а отрицательный корень обозначают $(-\sqrt[2m]{b})$.

Нуль есть единственный корень степени $2m$ из нуля. Таким образом, $\sqrt[2m]{0} = 0$.

Корень степени $2m$ из отрицательного числа не существует.

Замечание 1. В курсе математического анализа для высшей школы существование точки M (в доказательстве теоремы 1) и точек M и N (в доказательстве теоремы 2) доказывается на основании свойства непрерывности действительных чисел.

Замечание 2. При подробном изучении комплексных чисел показывается, что корни четной степени из отрицательных чисел являются комплексными числами. Слова «корень четной степени из отрицательного числа не существует» означают, что не существует действительного числа, являющегося корнем четной степени из отрицательного числа.

3.34° а) Сколько существует корней нечетной степени из любого действительного числа?

б) Может ли корень нечетной степени из положительного числа быть числом отрицательным?

в) Будет ли корень нечетной степени из отрицательного числа числом отрицательным?

г) Чему равен корень нечетной степени из нуля?

3.35 Как обозначают корень нечетной степени из числа b?

3.56° Для любого ли действительного числа существует корень четной степени?

3.37° а) Существует ли корень четной степени: из положительного числа; из нуля; из отрицательного числа?

б) Чему равен корень четной степени из нуля?

3.38 а) Как обозначают положительный корень четной степени из положительного числа? Приведите пример.

б) Как обозначают отрицательный корень четной степени из положительного числа? Приведите пример.

3.39° Почему не существует корней четной степени из отрицательного числа?

3.40 Покажите с помощью графика функции $y = x^3$, что существует единственный кубический корень из числа:

а) 1; б) 5; в) 0; г) -3.

3.41 Прочтите выражение:

а) $\sqrt[3]{5}$; б) $-\sqrt[7]{-2}$; в) $\sqrt[12]{7}$; г) $-\sqrt[5]{-7}$.

3.42 Имеет ли смысл запись:

а) $\sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[3]{-5}$; в) $\sqrt[4]{5}$; г) $\sqrt[4]{-5}$; д) $\sqrt[8]{0}$; е) $\sqrt[8]{-0{,}1}$?

3.43 Верно ли равенство:

а) $\sqrt[3]{-27} = -3$; б) $-\sqrt[4]{16} = -2$;

в) $\sqrt[3]{64} = -4$; г) $\sqrt[4]{625} = -5$?

3.44 Покажите с помощью графика функции $y = x^4$, что:

а) существуют два действительных корня четвертой степени из числа 3;

б) существует единственный действительный корень четвертой степени из числа 0;

в) не существует действительных корней четвертой степени из числа -1.

3.45 Верно ли равенство:

а) $\sqrt[4]{16} = -2$; б) $\sqrt[6]{1} = 1$; в) $\sqrt[4]{-16} = -2$; г) $\sqrt[4]{16} = 2$?

3.46 Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt[8]{35 - 6^2}$; б) $\sqrt[6]{27 - 5^2}$; в) $\sqrt{(-2)^3}$; г) $\sqrt[4]{(-8)^6}$?

3.47* Покажите с помощью графика функции $y = x^4$, что существуют следующие корни, и укажите их значение с точностью до единиц:

а) $\sqrt[4]{3}$; б) $-\sqrt[4]{3}$; в) $\sqrt[4]{2}$; г) $-\sqrt[4]{2}$;

д) $\sqrt[4]{0}$; е) $\sqrt[4]{0{,}5}$; ж) $-\sqrt[4]{0{,}5}$.

3.5. Арифметический корень

Пусть n — натуральное число и $n \geqslant 2$.

Неотрицательный корень степени n из неотрицательного числа b ($b \geqslant 0$) называют **арифметическим корнем степени n из числа b.**

Как уже отмечалось в пункте 3.4, для нечетного n существует только один корень из любого числа b. При этом он неотрицательный, если $b \geqslant 0$. Поэтому понятия корня нечетной степени из неотрицательного числа b и арифметического корня той же степени из того же самого числа b совпадают.

В случае же четного n, как уже отмечалось в пункте 3.4, существуют два корня степени n из положительного числа b. Один из них положительный: $\sqrt[n]{b}$ — это арифметический корень степени n из b, а другой равен ему по абсолютной величине, но противоположен по знаку: $-\sqrt[n]{b}$, это не арифметический корень. Корень степени n ($n \geqslant 2$) из нуля по определению есть арифметический корень степени n из нуля: $\sqrt[n]{0} = 0$.

Подчеркнем, что верны следующие утверждения:

1. Если b — неотрицательное число, а n — любое натуральное число ($n \geqslant 2$), то запись $\sqrt[n]{b}$ означает арифметический корень степени n из числа b.

2. Если b — отрицательное число, а $n = 2m + 1$ ($m \geqslant 1$) — нечетное число, то запись $\sqrt[2m+1]{b}$ означает корень степени $2m + 1$ из числа b, но этот корень не является арифметическим корнем.

3. Если b — отрицательное число, а $n = 2m$ ($m \geqslant 1$) — четное число, то запись $\sqrt[2m]{b}$ не имеет смысла.

ПРИМЕР 1.

а) Записи $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{0}$, $\sqrt[4]{5}$ — это записи арифметических корней.

б) Записи $-\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{-4}$, $-\sqrt[4]{5}$ — это записи корней, не являющихся арифметическими.

в) Записи $\sqrt{-3}$, $-\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-5}$, $\sqrt[6]{-11}$ не имеют смысла.

Заметим, что для отрицательного числа b справедливо равенство $\sqrt[2m+1]{b} = -\sqrt[2m+1]{|b|}$.

Например, $\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[5]{-7} = -\sqrt[5]{7}$.

ТЕОРЕМА 1. **Для натурального числа n ($n \geqslant 2$) и неотрицательного числа a справедливы равенства**

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \qquad (1)$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a. \qquad (2)$$

Доказательство. Так как a — неотрицательное число, то $\sqrt[n]{a}$ есть по определению неотрицательное число, n-я степень которого есть a. Это и выражается равенством (1).

Так как $a \geqslant 0$ — неотрицательное число, то, как показано в пункте 3.2, $a^n \geqslant 0$ и $\sqrt[n]{a^n}$ есть по определению неотрицательное число, n-я степень которого есть a^n. Таким числом является a, что и записано при помощи равенства (2). Подчеркнем, что другого неотрицательного числа, n-я степень которого равняется a^n, нет.

Теорема 1 доказана.

ПРИМЕР 2.

а) $(\sqrt[4]{2})^4 = 2$; б) $(\sqrt[3]{7})^3 = 7$; в) $(\sqrt[21]{1})^{21} = 1$;

г) $\sqrt[9]{100^9} = 100$; д) $\sqrt[7]{0^7} = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Для натурального числа n ($n \geqslant 2$) и неотрицательных чисел a и b из равенства $a^n = b^n$ следует равенство $a = b$.

Доказательство. Как показано выше, существует только один корень n-й степени из неотрицательного числа. Поэтому для неотрицательных чисел из их равенства следует равенство корней n-й степени из них, т. е. из равенства $a^n = b^n$ следует равенство $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{b^n}$. Учитывая, что $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, и используя равенство (2), получаем, что $\sqrt[n]{a^n} = a$ и $\sqrt[n]{b^n} = b$. Следовательно, $a = b$.

Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. Для натурального числа n ($n \geqslant 2$) и неотрицательных чисел a, b и c ($c \neq 0$) справедливы равенства

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \tag{3}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}. \tag{4}$$

Доказательство. Из равенства (1) имеем

$$(\sqrt[n]{a \cdot b})^n = a \cdot b,$$

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b.$$

Правые части полученных равенств равны. Следовательно, равны и левые их части:

$$(\sqrt[n]{a \cdot b})^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n.$$

Так как числа $\sqrt[n]{a \cdot b}$ и $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ неотрицательны, то, применяя теорему 2, получаем, что справедливо равенство (3). Аналогично доказывается равенство (4).

Теорема 3 доказана.

ПРИМЕР 3.

а) $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3}$;

б) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$;

в) $\sqrt[4]{\frac{2}{81}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{3}$,

г) $\sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}$.

Замечание. Если n — нечетное число, то теоремы 1, 2 и 3 справедливы для любых действительных чисел a, b и c ($c \neq 0$).

Кроме того, для натурального числа m и любого действительного числа a справедливо равенство

$$\sqrt[2m+1]{-a} = -\sqrt[2m+1]{a},$$

потому что

$$\sqrt[2m+1]{-a} = \sqrt[2m+1]{(-1)\,a} = \sqrt[2m+1]{-1}\ \sqrt[2m+1]{a} = -\sqrt[2m+1]{a}.$$

ПРИМЕР 4.

а) $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$; б) $\sqrt[5]{-1} = -\sqrt[5]{1} = -1$;

в) $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$; г) $\sqrt[5]{-100\,000} = -\sqrt[5]{10^5} = -10$.

Доказанные в теоремах 1—3 свойства корней степени n используют для вынесения множителя из-под знака корня, внесения множителя под знак корня и при освобождении дроби от иррациональности в знаменателе.

ПРИМЕР 5.

а) $\sqrt[3]{-135} = -\sqrt[3]{135} = -\sqrt[3]{5 \cdot 3^3} = -\sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{5} = -3\sqrt[3]{5}$;

б) $-2\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = -\sqrt[4]{48}$;

в) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}$.

3.48° а) Что называют арифметическим корнем степени n ($n \geqslant 2$) из числа a?

б) Для каких чисел $a \in \boldsymbol{R}$ введено понятие арифметического корня степени n ($n \geqslant 2$) из данного числа a?

в) Сколько существует арифметических корней степени n ($n \geqslant 2$) из данного числа?

3.49° Верны ли для любого неотрицательного числа a и любого натурального числа n ($n \geqslant 2$) равенства $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$?

3.50° Если $a^n = b^n$, то всегда ли $a = b$ ($n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$)?

3.51 Чему равен корень степени n ($n \geqslant 2$) из:

а) произведения неотрицательных чисел;

б) частного положительных чисел?

3.52 Чему равен $\sqrt[2m+1]{-a}$, если $a \in \boldsymbol{R}$?

3.53 Является ли записью арифметического корня выражение:

а) $\sqrt[3]{-2}$; б) $-\sqrt[4]{3}$; в) $\sqrt[3]{(-2)^2}$; г) $\sqrt[4]{(-3)^3}$?

Вычислите (3.54—3.59):

3.54 а) $\sqrt[3]{(-8)^2}$; б) $\sqrt[4]{10\,000}$; в) $\sqrt[5]{2\cdot 16}$; г) $\sqrt[6]{9\cdot 81}$.

3.55 а) $\sqrt[3]{1000}-\sqrt[4]{160\,000}$; б) $\sqrt[5]{3\,200\,000}+\sqrt[3]{8000}$;

в) $\sqrt[3]{0{,}008}+\sqrt[4]{0{,}0625}$; г) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}-\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$.

3.56 а) $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[3]{125\cdot 27}$; в) $\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{625}$;

г) $\sqrt[4]{81\cdot 16}$; д) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; е) $\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2}$;

ж) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{125}$; з) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{24}$; и) $\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{100}$.

3.57 а) $\sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{500})$; б) $\sqrt[4]{5}\,(\sqrt[4]{2000}-\sqrt[4]{125})$;

в) $\sqrt[3]{0{,}81}\cdot\sqrt[3]{0{,}9}$; г) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{1250}$.

3.58. а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$; б) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}$;

в) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{-2}$; г) $\sqrt[5]{-7}\cdot\sqrt[5]{49}\cdot\sqrt[5]{49}$.

3.59 а) $(\sqrt[3]{-2})^3+(\sqrt[5]{8})^5$; б) $\sqrt[5]{-1}-\sqrt[3]{-8}$.

3.60 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{40}$; б) $\sqrt[5]{-64}$; в) $\sqrt[5]{-96}$; г) $\sqrt[3]{54}$;

д) $\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$; е) $\sqrt[3]{\frac{27}{4}}$; ж) $\sqrt[3]{-\frac{250}{16}}$; з) $\sqrt[3]{-\frac{64}{7}}$;

и) $\sqrt[4]{32}$; к) $\sqrt[4]{243}$; л) $\sqrt[4]{1296}$; м) $\sqrt[4]{50\,625}$.

3.61 Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$; в) $\frac{3}{\sqrt[3]{-4}}$; г) $\frac{5}{\sqrt[5]{-9}}$.

3.62 Вычислите:

а) $\sqrt{(-2)^2}$; б) $\sqrt{(-5)^4}$; в) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$;

г) $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$; д) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$; е) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2}$.

3.63 Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{32}$; б) $\sqrt[5]{800}$; в) $30\sqrt[3]{\frac{1}{12}}+\frac{7}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+5\sqrt[3]{144}$;

г) $\sqrt[4]{80}$; д) $\sqrt[4]{405}$; е) $\sqrt[3]{320}+\sqrt[3]{108}-\sqrt[3]{32}-2\sqrt[3]{40}$;

ж) $\sqrt[4]{81\cdot(4-\sqrt{17})^4}$; з) $\sqrt[3]{0{,}001}-\sqrt[6]{0{,}000064}$.

3.64 Для каких чисел k справедливо равенство:

а) $\sqrt{(k-1)^2}=1-k$; б) $\sqrt{(1+k)^2}=-1-k$?

3.65 Упростите выражение $\sqrt[4]{(x+1)^4}$, если:

а) x — любое действительное число; б) $x\geqslant -1$; в) $x<-1$.

3.6. Свойства корней степени n

ТЕОРЕМА 1. Для натуральных чисел m, n ($m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$) и неотрицательного числа a справедливы равенства

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \tag{1}$$

$$\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}, \tag{2}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}. \tag{3}$$

Доказательство. В силу того, что $a \geqslant 0$, числа, стоящие в левых и правых частях (предполагаемых пока) равенств (1) — (3), неотрицательны.

Метод доказательства этих равенств основан на применении теоремы 2 п. 3.5, в силу которой если n-е степени неотрицательных чисел равны между собой, то и сами числа равны между собой.

Если возвести отдельно левую и правую части предполагаемого равенства (1) в степень n, то получим равные числа:

$$\left((\sqrt[n]{a})^m\right)^n = \left((\sqrt[n]{a})^n\right)^m = a^m, \quad \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m.$$

Следовательно, равенство (1) верно.

Если возвести отдельно левую и правую части предполагаемого равенства (2) в степень mn, то получим равные числа:

$$\left(\sqrt[mn]{a^m}\right)^{mn} = a^m, \qquad (\sqrt[n]{a})^{mn} = \left((\sqrt[n]{a})^n\right)^m = a^m.$$

Следовательно, равенство (2) верно.

Если возвести отдельно левые и правые части предполагаемого равенства (3) в степень mn, то получим равные числа:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a, \quad (\sqrt[mn]{a})^{mn} = a.$$

Следовательно, равенство (3) верно.

Теорема 1 доказана.

ПРИМЕР 1.

а) $\sqrt{4^3} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$; б) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}\right)^4} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$;

в) $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt{12}} = \sqrt[6]{12}$;

д) $\sqrt[4]{16} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$.

Замечание. Если m и n — нечетные числа, то теорема 1 справедлива для любых действительных чисел a, в том числе и отрицательных.

ТЕОРЕМА 2. **Для натурального числа m и любого действительного числа a справедливо равенство**

$$\sqrt[2m]{a^{2m}} = |a|. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть a есть произвольное действительное число. Тогда

$$a^{2m} = |a|^{2m} \geqslant 0.$$

Поэтому в силу равенства (2) п. 3.5

$$\sqrt[2m]{a^{2m}} = \sqrt[2m]{|a|^{2m}} = |a|.$$

Следовательно, равенство (4) верно.

Теорема 2 доказана.

ПРИМЕР 2. а) $\sqrt[6]{(-3)^6} = |-3| = 3$; б) $\sqrt[4]{5^4} = |5| = 5$.

Замечание. Для любого натурального числа m и любого действительного числа a справедливо равенство

$$\sqrt[2m+1]{a^{2m+1}} = a.$$

Справедливость этого утверждения следует из замечания на с. 109.

ТЕОРЕМА 3. **Пусть a — положительное число, p — целое число и n — натуральное число ($n \geqslant 2$). Тогда справедливо равенство**

$$\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p. \tag{5}$$

Доказательство. Если p — натуральное число, то равенство (5) уже доказано (см. (1)).

Если $p = 0$, то $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{1} = 1$, $(\sqrt[n]{a})^p = 1$.

Следовательно, $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$.

Если $p < 0$, то $p = -|p|$, где $|p|$ — натуральное число. Тогда, используя определение степени с отрицательным целым показателем и свойства корней степени n из положительного числа, получаем

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^{|p|}}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^{|p|}}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^{|p|}} = (\sqrt[n]{a})^{-|p|} = (\sqrt[n]{a})^p.$$

Теорема 3 доказана.

ПРИМЕР 3. а) $\sqrt[3]{27^{-4}} = (\sqrt[3]{27})^{-4} = 3^{-4}$; б) $\sqrt{9^3} = (\sqrt{9})^3 = 3^3$.

3.66° а) Какие свойства корней степени n вам известны?

б) Чему равен $\sqrt[2m+1]{a^{2m+1}}$, если a — любое действительное число?

в) Чему равен $\sqrt[2m]{a^{2m}}$, если a — любое действительное число?

г) Справедливо ли равенство $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$, если n — натуральное число ($n \geqslant 2$), p — целое число, a — положительное число?

Вычислите (**3.67—3.69**):

3.67 а) $(\sqrt{3})^2$; б) $\sqrt[3]{8^2}$; в) $\sqrt[3]{125^2}$; г) $\sqrt[4]{81^3}$;

д) $\sqrt{49^3}$; е) $\sqrt[3]{27^2}$; ж) $\sqrt[4]{16^3}$; з) $\sqrt[5]{32^4}$.

3.68 а) $\sqrt[4]{9^2}$; б) $\sqrt[4]{25^2}$; в) $\sqrt[6]{8^2}$; г) $\sqrt[6]{16^3}$;

д) $\sqrt[6]{27^2}$; е) $\sqrt[6]{81^3}$; ж) $\sqrt[200]{49^{100}}$; з) $\sqrt[300]{125^{100}}$.

3.69 а) $\sqrt[4]{81}$; б) $\sqrt[4]{625}$; в) $\sqrt[4]{160\,000}$; г) $\sqrt[4]{0{,}0625}$;

д) $\sqrt[6]{729}$; е) $\sqrt[6]{64\,000\,000}$; ж) $\sqrt[6]{0{,}000729}$.

3.70 Упростите[1]:

а) $\sqrt[4]{x^4}$; б) $\sqrt[4]{(-x)^4}$;

в) $\sqrt{(x-1)^2}$, если $x < 1$; г) $\sqrt{(1-x)^2}$, если $x \geqslant 1$.

3.71 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{80}$; б) $\sqrt[3]{81}$; в) $\sqrt[3]{250}$; г) $\sqrt[3]{-648}$; д) $\sqrt[5]{a^7 b}$;

е) $\sqrt[4]{16c^5d^6}$, если $c > 0$, $d > 0$; ж) $\sqrt[4]{5x^4}$, если $x < 0$; з) $\sqrt[5]{3x^5y}$.

3.72 Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; б) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{18}$; в) $5\sqrt[3]{2a} \cdot \sqrt[3]{4b}$; г) $\sqrt[5]{a} \cdot 2\sqrt[5]{a^4}$;

д) $\sqrt[3]{2c^2} \cdot \sqrt[3]{4c}$; е) $\sqrt[3]{9x} \cdot \sqrt[3]{9x^2}$; ж) $\sqrt[11]{a} \cdot \sqrt[11]{b} \cdot \sqrt[11]{c}$;

з) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{x}$; и) $\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[3]{a^4}$.

3.73 Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$; б) $2\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$; в) $5\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$; г) $7\sqrt[5]{\frac{1}{b}}$; д) $b\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$;

е) $c\sqrt[3]{\frac{x^2}{c}}$; ж) $\frac{ay}{b}\sqrt[3]{\frac{b^2x}{a^2y}}$; з) $\frac{a^2}{b}\sqrt[4]{\frac{b^2x}{a^7}}$, где $b > 0$.

---

[1] Здесь и далее буквами обозначены числа, для которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

Упростите выражение (3.74—3.77):

3.74 а) $\dfrac{\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt[4]{m}}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^4}}$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{a^5b}}{\sqrt[3]{a^2b^4}}$; г) $\dfrac{\sqrt[4]{m^7n^5}}{\sqrt[4]{m^3n}}$.

3.75 а) $(\sqrt[3]{x})^2$; б) $(\sqrt[4]{m})^5$; в) $(\sqrt[5]{ab^4})^2$; г) $(\sqrt[3]{4x^3y^2})^2$.

3.76 а) $\sqrt[4]{a^2}$; б) $\sqrt[6]{a^3}$; в) $\sqrt[4]{a^2b^2}$; г) $\sqrt[6]{a^4b^2}$.

3.77 а) $\sqrt[6]{27}$; б) $\sqrt[6]{16}$; в) $\sqrt[9]{64}$; г) $\sqrt[12]{81}$.

3.78 Запишите $\sqrt{a}$ $(a \geqslant 0)$ как корень:
а) четвертой степени; б) шестой степени;
в) десятой степени; г) шестнадцатой степени;
д) двенадцатой степени; е) восьмой степени;
ж) двадцать четвертой степени; з) тридцатой степени.

3.79* Упростите числовое выражение:
а) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[3]{3\sqrt{2}}$; в) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}$; г) $\sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt{4}}}$;
д) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}} : \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$; е) $\sqrt[3]{32\sqrt[4]{4}} \cdot \sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}}$.

3.80 Запишите в виде корней одной и той же степени три числа:
а) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt[6]{5}$; б) $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{15}$ и $\sqrt[8]{50}$.

3.81 Запишите множители в виде корней одной и той же степени и упростите выражение:
а) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a}$; б) $\sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[3]{b}$; в) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{b}$; г) $\sqrt[9]{x} \cdot \sqrt[12]{y}$.

3.7*. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$

Пусть n $(n \geqslant 2)$ — натуральное число. Каждому неотрицательному числу x поставим в соответствие число y, равное арифметическому корню степени n из x. Иными словами, на множестве неотрицательных чисел зададим функцию

$$y = \sqrt[n]{x} \ (x \geqslant 0). \tag{1}$$

Таким образом, областью определения функции (1) является множество неотрицательных чисел: $x \geqslant 0$.

Отметим следующие свойства функции (1).

1. Если $x = 0$, то $y = 0$.
2. Если $x > 0$, то $y > 0$.
3. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ возрастает.
4. Если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$.
5. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ непрерывна.

Свойство 1 следует из того, что корень степени n из нуля равен нулю.

Свойство 2 следует из того, что арифметический корень степени n из положительного числа есть число положительное.

Докажем теперь свойство 3, т. е. докажем (способом от противного), что если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то $\sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2}$. Предположим, что найдутся числа x_1 и x_2, такие, что

$$0 \leqslant x_1 < x_2, \text{ но } \sqrt[n]{x_1} \geqslant \sqrt[n]{x_2}.$$

Учитывая, что эти числа неотрицательные, получим, что

$$\left(\sqrt[n]{x_1}\right)^n \geqslant \left(\sqrt[n]{x_2}\right)^n,$$

т. е. $x_1 \geqslant x_2$, что противоречит неравенству $0 \leqslant x_1 < x_2$. Следовательно, наше предположение неверно, а верно свойство 3.

Если x стремится к бесконечности, пробегая числа 1^n, 2^n, 3^n, 4^n, ..., m^n, ..., то $y = \sqrt[n]{x}$ пробегает числа 1, 2, 3, 4, ..., m, ... и, очевидно, также стремится к $+\infty$. Для других значений x это свойство сохраняется.

Из перечисленных свойств функции (1) следует, что она имеет область изменения $[0; +\infty)$.

Доказательство свойства 5 будет следовать из рассмотрения графика функции (1).

Перейдем к построению графика функции

$$y = \sqrt[n]{x}, \quad x \geqslant 0.$$

Рассмотрим для $y \geqslant 0$ степенную функцию

$$x = y^n \quad (y \geqslant 0) \tag{2}$$

и построим ее график (обозначенный на рисунке 32 буквой Г) в системе координат xOy следующим образом. Чтобы получить точку графика Г, соответствующую значению y ($y \geqslant 0$), отметим на оси Oy точку, соответствующую числу y; проведем через нее прямую, параллельную оси Ox; отметим на оси Ox точку, соответствующую числу x ($x = y^n$), и проведем через нее прямую, параллельную оси Oy. Пересечение этих прямых — точка A (y^n; y) — и есть точка графика Г функции (2), соответствующая значению y.

Совокупность точек A (y^n; y), соответствующих любым неотрицательным y, есть график функции $x = y^n$ ($y \geqslant 0$), т. е. кривая Г (рис. 32).

Но для $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ равенства (2) и (1) выражают одну и ту же зави-

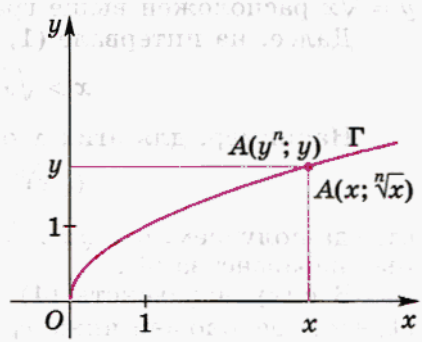


Рис. 32

симость между x и y. Это показывает, что кривую Г можно рассматривать как совокупность точек $A(x;\ \sqrt[n]{x})$, и, следовательно, кривая Г есть также график функции $y = \sqrt[n]{x}$ для $x \geqslant 0$.

Итак, график функции $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$ есть часть графика функции $x = y^n$ для $y \geqslant 0$.

Легко видеть, что график функции (1) отражает свойства 1—5 функции (1).

Действительно, график функции (1) проходит через начало координат — свойство 1; график функции (1) расположен выше оси Ox для $x > 0$ — свойство 2; график изображает возрастающую функцию — свойство 3; при $x \to +\infty$ ординаты соответствующих точек графика функции неограниченно возрастают — свойство 4; график функции (1) есть непрерывная кривая — свойство 5.

Приведем еще два свойства арифметических корней.

6. Если $x > 1$, то $\sqrt[n]{x} > 1$.
7. Если $0 < x < 1$, то $0 < \sqrt[n]{x} < 1$.

Справедливость этих свойств следует из того, что $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{1} = 1$, и того, что функция $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$ возрастает.

На интервале $(0;\ 1)$, т. е. для значений x, для которых $0 < x < 1$, выполняются неравенства

$$x < \sqrt{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[4]{x} < \ldots . \tag{3}$$

Например, для этих x очевидны неравенства

$$(\sqrt{x})^6 = x^3 < x^2 = (\sqrt[3]{x})^6,$$

откуда и получаем, что $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x}$. Аналогично доказываются и остальные неравенства (3).

В силу неравенств (3) график функции $y = \sqrt{x}$ на интервале $(0;\ 1)$ расположен выше графика функции $y = x$, график функции $y = \sqrt[3]{x}$ расположен выше графика функции $y = \sqrt{x}$ и т. д.

Далее, на интервале $(1;\ +\infty)$ выполняются неравенства

$$x > \sqrt{x} > \sqrt[3]{x} > \sqrt[4]{x} > \ldots . \tag{4}$$

Например, для этих x очевидны неравенства

$$(\sqrt{x})^6 = x^3 > x^2 = (\sqrt[3]{x})^6,$$

откуда получаем, что $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x}$. Аналогично доказываются и остальные неравенства (4).

В силу неравенств (4) график функции $y = \sqrt{x}$ на интервале $(1;\ +\infty)$ расположен ниже графика функции $y = x$, график функции $y = \sqrt[3]{x}$ расположен ниже графика функции $y = \sqrt{x}$ и т. д.

На рисунке 33 в одной и той же декартовой системе координат xOy изображены для $x \geqslant 0$ графики функций $y = x$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$.

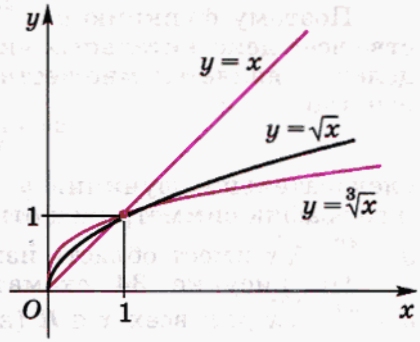


Рис. 33

3.82 Сформулируйте свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$. Какая кривая является графиком этой функции?

Постройте график функции (3.83—3.84):

3.83 а) $x = 2y$; б) $y = -5y$; в) $x = y^2$, $y \geqslant 0$; г) $x = y^3$, $y \geqslant 0$; д) $x = 2y - 4$; е) $x = y + 5$; ж) $x = 2y^2$, $y \geqslant 0$; з) $x = 5y^3$, $y \geqslant 0$.

3.84 а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt[3]{x}$, $x \geqslant 0$; в) $y = \sqrt[4]{x}$; г) $y = \sqrt[5]{x}$, $x \geqslant 0$.

3.85 Известно, что: а) $\sqrt[3]{a} > 1$; б) $\sqrt[3]{a} < 1$. Верно ли, что $a > 1$; $a > 0$?

3.86 Постройте график функции $y = \sqrt[4]{x}$. С его помощью найдите, при каких x справедливо неравенство:
а) $x^4 > 1$; б) $x^4 < 1$.

3.8*. Функция $y = \sqrt[n]{x}$

Если $n = 2m$ $(m \in N)$ — четное число, то корень степени $2m$ определен лишь для неотрицательных чисел. Поэтому областью определения функции $y = \sqrt[2m]{x}$ является полуинтервал $[0; +\infty)$. Все свойства и график этой функции рассмотрены в предыдущем пункте.

Если же $n = 2m + 1$ $(m \in N)$ — нечетное число, то корень степени $2m + 1$ определен уже для всех действительных чисел.

При этом для неотрицательных чисел он является арифметическим корнем, а для отрицательных чисел он не является арифметическим корнем, но его можно выразить через арифметический корень. Так как $\sqrt[2m+1]{x}$ для $x \geqslant 0$ является арифметическим корнем, то для этих x отмеченные выше свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$ сохраняются. А так как для $x < 0$ справедливо равенство

$$\sqrt[2m+1]{x} = -\sqrt[2m+1]{|x|},$$

то значение функции $y = \sqrt[2m+1]{x}$ можно вычислить и для любого отрицательного числа x.

Поэтому функцию $y = \sqrt[2m+1]{x}$ можно рассматривать на множестве всех действительных чисел, т. е. считать, что областью ее определения является множество $\boldsymbol{R}$. На множестве $\boldsymbol{R}$ справедливо равенство

$$\sqrt[2m+1]{-x} = -\sqrt[2m+1]{x},$$

следовательно, функция $y = \sqrt[2m+1]{x}$ является нечетной функцией и ее график симметричен относительно начала координат. Функция $y = \sqrt[2m+1]{x}$ имеет область изменения $(-\infty; +\infty)$.

На рисунке 34 схематически изображен график функции $y = \sqrt[2m+1]{x}$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$ (на рисунке $m = 1$).

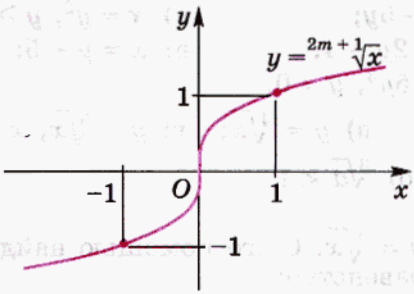


Рис. 34

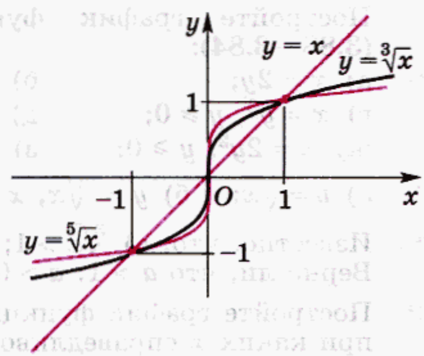


Рис. 35

Сформулируем свойства функции

$$y = \sqrt[2m+1]{x} \quad (m \in \boldsymbol{N},\ \ x \in \boldsymbol{R}). \tag{1}$$

1. **Область определения функции (1) — множество $\boldsymbol{R}$.**
2. **Область изменения функции (1) — множество $\boldsymbol{R}$.**
3. **Функция (1) — возрастающая на множестве $\boldsymbol{R}$.**
4. **Функция (1) нечетная.**
5. **Функция (1) непрерывная.**

На рисунке 35 в одной и той же системе координат изображены графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = \sqrt[5]{x}$. Для сравнения на рисунке показан и график функции $y = x$.

3.87° Какова область определения функции $y = \sqrt[n]{x}$ для:
а) четных n; б) нечетных n?

3.88° Для каких n (четных или нечетных) функция $y = \sqrt[n]{x}$ является нечетной?

3.89 Какие точки принадлежат всем графикам функций $y = \sqrt[n]{x}$ при: а) четных n; б) нечетных n?

3.90 Постройте график функции:
а) $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = \sqrt[5]{x}$; в) $y = \sqrt[7]{x}$.

3.91 Какова область изменения функции $y = \sqrt[n]{x}$ при: а) четном n; б) нечетном n?

3.92 Является ли функция $y = \sqrt[2m+1]{x}$ $(m \in N)$ возрастающей?

Постройте графики функций (3.93—3.94):

3.93 а) $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = \sqrt[3]{-x}$; в) $y = \sqrt[3]{|x|}$; г) $y = \sqrt[3]{x} - 2$;
д) $y = \sqrt[3]{x-2}$; е) $y = \sqrt[3]{2-x}$; ж) $y = |\sqrt[3]{x} - 2|$;
з) $y = \sqrt[3]{2-|x|}$; и) $y = \left|\sqrt[3]{2-|x|} - 1\right|$.

3.94 а) $y = \sqrt[4]{x}$; б) $y = \sqrt[4]{-x}$; в) $y = \sqrt[4]{|x|}$; г) $y = \sqrt[4]{x} - 2$;
д) $y = \sqrt[4]{x-2}$; е) $y = \sqrt[4]{2-x}$; ж) $y = |\sqrt[4]{x} - 2|$;
з) $y = \sqrt[4]{2-|x|}$; и) $y = \left|\sqrt[4]{2-|x|} - 1\right|$.

3.95* Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{-x^2+6x-5} + \sqrt[4]{x^2-8x+15}$;

б) $y = \sqrt[4]{12+4x-x^2} + \sqrt[6]{x^2-3x-10}$;

в) $y = \sqrt{\dfrac{-x+5}{x+1}} + \sqrt{\dfrac{x}{x-3}}$; г) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{-x+6}} + \sqrt[3]{\dfrac{x-4}{x+1}}$;

д) $y = \dfrac{\sqrt{(x^2+3x-10)\cdot|x+1|}}{\sqrt{-x^2-x+2}}$; е) $y = \dfrac{\sqrt{(x^2+x-6)\cdot|x+2|}}{\sqrt[5]{-x^2-x+12}}$.

3.9*. Корень степени n из натурального числа

Пусть n $(n \geqslant 2)$ — натуральное число. Очевидно, что n-я степень натурального числа есть натуральное число. Но не всякое натуральное число есть n-я степень некоторого натурального числа.

Например, среди натуральных чисел, не больших 100, только четыре, т. е. 4%, являются кубами натуральных чисел, а именно: 1^3, 2^3, 3^3, 4^3.

Среди натуральных чисел, не больших 1000, только 10, т. е. 1%, являются кубами натуральных чисел, а именно; 1^3, 2^3, 3^3, ..., 10^3.

Мы видим, что среди больших натуральных чисел редко встречаются n-е степени натуральных чисел.

Отметим следующий факт:

арифметический корень степени n ($n \geqslant 2$) из натурального числа может быть или натуральным числом, или иррациональным числом.

Таким образом, например, корни $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[6]{19}$ есть числа иррациональные.

Это утверждение при любом $n \geqslant 2$ доказывается так же, как и для $n = 2$.

Если данное натуральное число не есть n-я ($n \geqslant 2$) степень натурального числа, то из этого числа корень степени n точно не извлекается. Покажем, как можно приближенно извлечь корень степени n из натурального числа, не являющегося n-й степенью натурального числа.

Ограничимся примером.

Вычислим приближенно с точностью до второго знака после запятой число $\sqrt[3]{17}$.

Мы знаем, что это число положительное. Оно имеет некоторое десятичное разложение:

$$\sqrt[3]{17} = \alpha_0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots .$$

Вычислить приближенно с точностью до второго знака после запятой (с недостатком) число $\sqrt[3]{17}$ — это значит определить числа α_0, α_1, α_2.

Рассмотрим числа 0^3, 1^3, 2^3, 3^3, ..., чтобы найти два стоящих рядом, между которыми находится число 17. Очевидно,

$$8 = 2^3 < 17 < 3^3 = 27.$$

Следовательно, $2 < \sqrt[3]{17} < 3$ и $\alpha_0 = 2$.

Теперь рассмотрим числа

$$2^3;\ 2{,}1^3;\ 2{,}2^3;\ 2{,}3^3;\ 2{,}4^3;\ \ldots;\ 2{,}9^3;\ 3^3,$$

найдем среди них два стоящих рядом, между которыми находится число 17.

Имеем $15{,}625 = 2{,}5^3 < 17 < 2{,}6^3 = 17{,}676$, откуда

$$2{,}5 < \sqrt[3]{17} < 2{,}6,$$

и, следовательно, $\alpha_1 = 5$.

Теперь рассмотрим с той же целью числа

$$2{,}5^3;\ 2{,}51^3;\ 2{,}52^3;\ \ldots;\ 2{,}59^3;\ 2{,}6^3.$$

Оказывается, что

$$16{,}974... = 2{,}57^3 < 17 < 2{,}58^3 = 17{,}173...,$$

следовательно, $\alpha_2 = 7$.

Итак, $\sqrt[3]{17} = 2{,}57\ ...$.

Как видно, использованный метод вычисления простой, но громоздкий.

Электронные калькуляторы эти вычисления производят мгновенно. Точность результата определяется техническими возможностями данного калькулятора.

Приближенные значения квадратных и кубических корней из чисел также можно получить, используя соответствующие таблицы.

3.96° Может ли быть рациональным числом корень степени n ($n \geqslant 2$):
а) из простого числа; б) из натурального числа?

3.97 Что значит вычислить с точностью до третьего знака после запятой (с недостатком) $\sqrt[3]{N}$, где N — простое число?

3.98 Если натуральное число N не есть куб натурального числа, то является ли число $\sqrt[3]{N}$ иррациональным?

3.99 Имеются ли среди натуральных чисел от 100 до 200 четвертые степени каких-либо натуральных чисел?

3.100 Является ли кубом натурального числа:
а) 0; б) 1; в) -8; г) 1000?

3.101 Докажите, что не существует рационального числа, куб которого равен:
а) 2; б) 3; в) 4; г) 5.

3.102 Докажите иррациональность числа:
а) $\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[3]{p}$, где p — простое число.

3.103 Является ли рациональным число:
а) $\sqrt{4}$; б) $\sqrt[3]{64}$; в) $\sqrt[3]{5}$; г) $\sqrt[4]{64}$?

3.104 Для каждого из чисел 7; 10; 17 найдите:
а) наибольшее натуральное число, куб которого меньше данного числа;
б) наименьшее натуральное число, куб которого больше данного числа;
в) наибольшее натуральное число, четвертая степень которого меньше данного числа;
г) наименьшее натуральное число, четвертая степень которого больше данного числа.

3.105 Найдите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число:
а) $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt[4]{20}$; г) $\sqrt[4]{300}$.

3.106 Вычислите с точностью до 1:
а) $\sqrt[3]{175}$; б) $\sqrt[3]{241}$; в) $\sqrt[4]{105}$; г) $\sqrt[4]{273}$.

3.107 Проверьте справедливость неравенств:
а) $3 < \sqrt[3]{30} < 4$; б) $7 < \sqrt[3]{350} < 8$;
в) $5{,}1 < \sqrt[3]{135} < 5{,}2$; г) $3{,}5 < \sqrt[3]{45} < 3{,}6$.

3.108 Какое число является лучшим приближением $\sqrt[3]{96}$:
а) 4 или 5; б) 4,5 или 4,6?

3.109 Найдите приближенное значение кубического корня с точностью до первого знака после запятой (с недостатком) из числа:
а) 3; б) 6; в) 8; г) 10.

3.110 Вычислите с точностью до третьего знака после запятой:
а) $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{5}$; в) $\sqrt[3]{7}$.

3.111 Вычислите с точностью до первого знака после запятой:
а) $\sqrt[4]{3}$; б) $\sqrt[5]{7}$; в) $\sqrt[5]{8}$.

§ 4. Степень положительного числа

4.1. Степень с рациональным показателем

Вам уже знакомо понятие степени с целым показателем p. Теперь определим **степень с рациональным показателем** $\frac{p}{q}$, где p — целое число, а q — натуральное число, $q \geqslant 2$.

Пусть a — положительное число, а $\frac{p}{q}$ — рациональное число ($q \geqslant 2$). По определению число a в степени $\frac{p}{q}$ есть арифметический корень степени q из a в степени p, т. е.

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Например, $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$, $3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3}$, $7^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{7}$, $2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^{-3}}$.

ТЕОРЕМА. Пусть a — положительное число, p — целое число, k и q — натуральные числа, $q \geqslant 2$, $k \geqslant 2$. Тогда справедливы равенства

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p, \tag{1}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pk}{qk}}, \tag{2}$$

$$a^p = a^{\frac{pq}{q}}. \tag{3}$$

Доказательство. По определению степени с рациональным показателем и по теореме 3 (п. 3.6) имеем

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p,$$

тем самым равенство (1) доказано.

Докажем теперь равенство (2). По определению степени с рациональным показателем и свойству корней q-й степени имеем $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[qk]{a^{pk}} = a^{\frac{pk}{qk}}$, и равенство (2) также доказано.

Применяя определение степени с рациональным показателем и свойства корней q-й степени, получим, что

$$a^{\frac{pq}{q}} = \sqrt[q]{a^{pq}} = \sqrt[q]{(a^p)^q} = a^p.$$

Тем самым доказано равенство (3).

Теорема доказана. ●

ПРИМЕР.

а) $27^{\frac{4}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^4 = 3^4$; б) $6^{\frac{3}{9}} = 6^{\frac{1}{3}}$; в) $2^{-\frac{12}{3}} = 2^{-4}$; г) $5^{-3} = 5^{-\frac{6}{2}}$.

Замечание 1. Если k и q — натуральные числа, а p — целое число, то справедливо равенство $\frac{p}{q} = \frac{pk}{qk}$. Поэтому если $r = \frac{p}{q}$, то $r = \frac{pk}{qk}$ для любого натурального k.

Равенство (2) показывает, что определение степени с рациональным показателем a^r не зависит от формы записи числа r, а зависит лишь от самого числа r. При любой форме записи данного рационального числа r определение a^r приводит к одному и тому же числу. Если бы это было не так, то определение степени с рациональным показателем было бы противоречиво.

Замечание 2. Равенство (3) показывает, что определение степени с рациональным показателем содержит в себе определение степени с целым показателем.

4.1° а) Что называют степенью с рациональным показателем $\frac{p}{q}$ положительного числа a?

б) Сформулируйте теорему, доказанную в этом пункте.

Запишите в виде степени с рациональным показателем[1] (4.2—4.3):

4.2 а) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{1\frac{1}{3}}$;

б) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{0,1}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{2,5}$;

в) $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt[4]{3^5}$, $\sqrt[6]{7^5}$, $\sqrt{3^7}$, $\sqrt[5]{2^3}$.

4.3 а) $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt{x^3}$;

б) $\sqrt{2a}$, $\sqrt[3]{3x}$, $\sqrt[4]{5x^3}$, $\sqrt{2xy^3}$, $\sqrt[5]{8a^2b^3}$;

в) $\sqrt{a-1}$, $\sqrt[3]{m+n}$, $\sqrt[3]{(x+1)^2}$, $\sqrt[5]{(x-4)^3}$.

Запишите в виде корней (4.4—4.6):

4.4 а) $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $b^{\frac{1}{4}}$, $(ac)^{\frac{1}{7}}$, $(kl)^{\frac{1}{20}}$;

б) $(x+1)^{\frac{1}{2}}$, $(a-b)^{\frac{7}{4}}$, $(m+3)^{\frac{1}{4}}$, $(x-y)^{\frac{1}{7}}$.

4.5 а) $3^{\frac{2}{3}}$, $4^{\frac{3}{5}}$, $6^{\frac{2}{3}}$, $7^{\frac{5}{9}}$, $10^{0,6}$; б) $a^{1\frac{2}{3}}$, $c^{1,4}$, $x^{\frac{1}{n}}$, $x^{\frac{n}{2}}$, $y^{\frac{m}{n}}$, где $n \in N$, $m \in N$ и $n \geqslant 2$.

4.6 а) $a^{-0,5}$, $b^{-\frac{2}{3}}$, $c^{-2,5}$, $x^{-0,5}$;

б) $(a^2-b)^{-\frac{1}{2}}$, $(x+2y)^{-0,75}$, $(1-2y)^{-\frac{2}{5}}$, $(m-n^2)^{-\frac{1}{n}}$, где $n \in N$ и $n \geqslant 2$.

4.7 Вычислите:

а) $25^{\frac{1}{2}}$, $49^{\frac{1}{2}}$, $27^{\frac{1}{3}}$, $16^{0,25}$, $100^{0,5}$;

б) $16^{\frac{3}{4}}$, $27^{\frac{2}{3}}$, $25^{2,5}$, $8^{\frac{5}{3}}$, $27^{\frac{4}{3}}$;

[1] Здесь и далее буквами обозначены числа, для которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

в) $8^{-\frac{2}{3}}$, $16^{-\frac{3}{2}}$, $64^{-\frac{5}{6}}$, $32^{-0,4}$;

г) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{49}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$; д) $(0{,}01)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6{,}25)^{-0{,}5}$.

4.8 Объясните, почему для любого положительного числа a верно равенство:

а) $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a$; б) $(a^3)^{\frac{1}{3}} = a$; в) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$; г) $(a^2)^{\frac{1}{2}} = a$.

4.2. Свойства степени с рациональным показателем

ТЕОРЕМА 1. Положительное число a в степени с любым рациональным показателем r положительно:

$$a^r > 0. \tag{1}$$

Доказательство. Запишем число r в виде

$$r = \frac{p}{q},$$

где q — натуральное число, $q \geqslant 2$, а p — целое (положительное, отрицательное или нуль).

Так как a — положительное число, то, используя определение степени с рациональным показателем и свойства корня q-й степени, получим, что

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} > 0,$$

т. е. неравенство (1) верно при $p = 1$.

Далее, используя свойства степени положительного числа с целым показателем, имеем при любом целом p:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 0,$$

т. е. теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть a — положительное число, а r_1, r_2 и r — рациональные числа. Тогда справедливы свойства:

1. При умножении степеней с рациональными показателями одного и того же положительного числа показатели степеней складывают:

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}. \tag{2}$$

2. При делении степеней с рациональными показателями одного и того же положительного числа показатели степеней вычитают:

$$a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2}. \qquad (3)$$

3. При возведении степени с рациональным показателем положительного числа в рациональную степень показатели степеней перемножают:

$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}. \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть r_1 и r_2 — рациональные числа. Запишем их в виде

$$r_1 = \frac{m}{n} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{k}{n},$$

где m и k — целые числа, n — натуральное число, $n \geqslant 2$. Используя определение степени с рациональным показателем, свойства арифметических корней и свойства степени с целым показателем, получим

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} =$$

$$= \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{n}} = a^{r_1 + r_2},$$

т. е. равенство (2) доказано.

Теперь на основании свойства 1 имеем

$$a^r \cdot a^{-r} = a^0 = 1,$$

откуда следует равенство

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}. \qquad (5)$$

Далее в силу свойства 1 и равенства (5) получим

$$a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1} \cdot a^{-r_2} = a^{r_1 + (-r_2)} = a^{r_1 - r_2},$$

и равенство (3) тем самым доказано.

Теперь докажем равенство (4).

Пусть r_1 и r_2 — рациональные числа. Запишем их в виде

$$r_1 = \frac{m}{n} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{k}{l},$$

где m и k — целые числа, n и l — натуральные числа ($n \geqslant 2$, $l \geqslant 2$). Используя определение степени с рациональным показателем и свойства арифметических корней, имеем

$$(a^{r_1})^{r_2} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{k}{l}} = \sqrt[l]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^k} = \sqrt[l]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k} = \sqrt[l]{\sqrt[n]{a^{mk}}} = \sqrt[ln]{a^{mk}} = a^{\frac{m \cdot k}{l \cdot n}} = a^{r_1 \cdot r_2},$$

и равенство (4) доказано.

Теорема 2 доказана.

ПРИМЕР 1.

а) $2^{-\frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$; б) $3^{\frac{1}{2}} : 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$;

в) $\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{-4} = 3^{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-4)} = 3^2 = 9$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть a и b — положительные числа, а r — рациональное число. Тогда справедливы следующие свойства степени с рациональным показателем:

1. Степень с рациональным показателем произведения положительных чисел равна произведению тех же степеней сомножителей:

$$(ab)^r = a^r \cdot b^r. \qquad (6)$$

2. Степень с рациональным показателем частного положительных чисел равна частному тех же степеней делимого и делителя:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}. \qquad (7)$$

Доказательство. Пусть $r = \frac{p}{q}$, где q — натуральное число, $q \geqslant 2$, а p — целое число. Тогда, используя определение степени с рациональным показателем и свойства арифметических корней, получаем

$$(ab)^r = (ab)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = a^r \cdot b^r,$$

и равенство (6) доказано.

Аналогично доказывается равенство (7).

Теорема 3 доказана. ●

ПРИМЕР 2.

а) $(0{,}125)^{-\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = (0{,}125 \cdot 8)^{-\frac{2}{3}} = 1^{-\frac{2}{3}} = 1$;

б) $(4{,}4)^{\frac{1}{3}} : (0{,}55)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4{,}4}{0{,}55}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть число $a > 1$, а r — рациональное число. Тогда

$$a^r > 1 \quad \text{при} \quad r > 0,$$
$$0 < a^r < 1 \quad \text{при} \quad r < 0.$$

Доказательство. Запишем r в виде

$$r = \frac{p}{q},$$

где q — натуральное число ($q \geqslant 2$), а p — целое число.

Если $a > 1$, то верно неравенство

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} > 1.$$

Если теперь $r > 0$, то $p > 0$ и

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1.$$

Если же $r < 0$, то $p = -|p| < 0$, $|p| > 0$ и

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{-|p|} = \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{|p|}} < 1.$$

На основании теоремы 1 $a^r > 0$.

Теорема 4 доказана. ●

ТЕОРЕМА 5. Пусть число $a > 1$, а рациональные числа r_1 и r_2 удовлетворяют неравенству $r_1 < r_2$. Тогда

$$a^{r_1} < a^{r_2}.$$

Доказательство. Используя свойства степени с рациональным показателем, получаем

$$a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1) > 0,$$

потому что по теореме 1 $a^{r_1} > 0$ при любом рациональном r_1 (положительном, отрицательном или нуле) и по теореме 4 $a^{r_2 - r_1} - 1 > 0$ при $r_2 - r_1 > 0$. Следовательно, $a^{r_1} < a^{r_2}$.

Теорема 5 доказана. ●

ТЕОРЕМА 6. Пусть число a принадлежит интервалу (0; 1), а рациональные числа r_1 и r_2 удовлетворяют неравенству $r_1 < r_2$. Тогда

$$a^{r_1} > a^{r_2}. \qquad (8)$$

Доказательство. Если $0 < a < 1$, то $a^{-1} > 1$. Теперь, применяя теорему 5, имеем $(a^{-1})^{r_1} < (a^{-1})^{r_2}$, откуда

$$\frac{1}{a^{r_1}} < \frac{1}{a^{r_2}}. \qquad (9)$$

Так как $a^{r_1} > 0$ и $a^{r_2} > 0$, то, умножая неравенство (9) на $a^{r_1} \cdot a^{r_2}$, получим справедливость неравенства (8).

Теорема 6 доказана. ●

ПРИМЕР 3.

а) $2^{\frac{1}{3}} < 2^{\frac{1}{2}}$, так как $2 > 1$ и $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, так как $0 < \frac{1}{2} < 1$ и $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

4.9° Может ли быть отрицательным числом степень с рациональным показателем положительного числа?

4.10 По какому правилу: а) умножают; б) делят степени с рациональным показателем одного и того же положительного числа?

4.11 По какому правилу возводят в степень с рациональным показателем степень положительного числа?

4.12 Чему равна степень с рациональным показателем:
а) произведения положительных чисел;
б) частного положительных чисел?

4.13 Если $a > 1$, то каким должно быть рациональное число r, чтобы выполнялось неравенство:
а) $a^r > 1$; б) $a^r < 1$?

4.14 Сравните a^{r_1} и a^{r_2}, если $a > 1$ и рациональные числа r_1 и r_2 таковы, что $r_1 > r_2$.

4.15 Сравните a^{r_1} и a^{r_2}, если $0 < a < 1$ и рациональные числа r_1 и r_2 таковы, что $r_1 > r_2$.

4.16 Пусть числа a и r таковы, что $0 < a < 1$, r — рациональное число. Докажите, что если:
а) $r < 0$, то $a^r > 1$; б) $r > 0$, то $0 < a^r < 1$.

Упростите выражение[1] (4.17—4.20):

4.17 а) $x^{0,5}\cdot x^{0,25}$; б) $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}$; в) $x^{\frac{5}{8}}\cdot x^{-0,5}$; г) $b\cdot b^{-1\frac{2}{3}}$;

д) $a^{\frac{3}{5}}\cdot a$; е) $a^{\frac{3}{8}}\cdot a^{-\frac{3}{8}}$; ж) $y^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{4}}\cdot y^{\frac{1}{3}}$; з) $z^{\frac{2}{3}}\cdot z^{\frac{3}{4}}\cdot z^{\frac{5}{6}}$.

4.18 а) $125^{1,5}\cdot 25^{-\frac{3}{4}}$; б) $2^{1,25}\cdot 16^{\frac{1}{16}}$; в) $x^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{x}$; г) $\sqrt[3]{x}\cdot x^{\frac{1}{4}}$;

д) $a^{-\frac{1}{2}}:\sqrt{a}$; е) $z^{\frac{2}{3}}:\sqrt[5]{z^2}$; ж) $\sqrt[4]{m}:m^{-\frac{1}{2}}$; з) $\sqrt[3]{a}:a^{-\frac{1}{6}}$.

4.19 а) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}\cdot a^{-\frac{1}{8}}$; б) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}:x^{-\frac{3}{16}}$.

4.20 а) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3$; б) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^6$; в) $\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{6}}$; г) $\left(y^{\frac{4}{7}}\right)^{\frac{21}{20}}$;

д) $\left(ab^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}$; е) $\left(x^{\frac{1}{3}}y\right)^{-1}$; ж) $\left(3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$; з) $\left(2x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

4.21 Вычислите:

а) $\left(9^{-\frac{1}{4}}+(2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{9^{-1}}-(2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}\right)$;

б) $\left((5\sqrt{5})^{-\frac{2}{3}}+\sqrt[4]{81^{-1}}\right)\cdot\left((5\sqrt{5})^{-\frac{2}{3}}-81^{-\frac{1}{4}}\right)$.

4.22 Упростите выражение:

а) $\dfrac{2b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{3}{2}}}-\left(\dfrac{b^{\frac{1}{3}}+3}{b^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{3}{2}}}\right)^2:\left(\dfrac{1}{b^{\frac{1}{3}}-3}+\dfrac{3b^{\frac{1}{3}}}{b-27}\right)$;

б) $\left(\dfrac{4}{a^{1,5}-8}-\dfrac{a^{0,5}-2}{a+2a^{0,5}+4}\right)\cdot\dfrac{a^2-8a^{0,5}}{a-16}-\dfrac{4a^{0,5}}{a^{0,5}+4}$;

в) $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{4}}(a+1)^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-1}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{4}}(a-1)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\right)^{-\frac{1}{3}}:\dfrac{(a+1)^{-\frac{8}{9}}}{(a-1)^{\frac{7}{9}}\cdot a^{\frac{4}{3}}}$;

г) $\left(\left(\dfrac{b-b^{-\frac{1}{2}}}{1-b^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{b+b^{-\frac{1}{2}}}{1+b^{-\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}}{2}+7\right)^{\frac{1}{3}}$.

[1] Здесь и далее буквами обозначены числа, для которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

4.23 Может ли значение выражения:

а) $\dfrac{x^{1\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}} + 0{,}25^{-1{,}5} - 9\,(x-2)^0$ равняться 1;

б) $\dfrac{x^{1\frac{3}{5}} - 2x^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{3}{5}} - 2x^{-\frac{2}{5}}} - 0{,}04^{-0{,}5} + 2\,(x+1)^0$ равняться -4?

4.3. Понятие предела последовательности

Напомним, что если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие по некоторому закону число x_n, то говорят, что задана числовая последовательность $\{x_n\}$. Иногда вместо слов «числовая последовательность $\{x_n\}$» говорят «переменная величина x_n, зависящая от натурального n» или, короче, «переменная x_n».

Приведем примеры переменных величин, зависящих от натурального n:

$$x_n = \frac{1}{n}; \quad y_n = -\frac{1}{n}; \quad z_n = \frac{(-1)^n}{n}; \quad u_n = q^n, \quad 0 < q < 1;$$

$$v_n = 1 - \frac{1}{n}; \quad w_n = (-1)^n; \quad \beta_n = a.$$

Переменную α_n называют **бесконечно малой**, если она стремится к нулю ($\alpha_n \to 0$) при неограниченном возрастании n.

Рассмотренные выше переменные x_n, y_n, z_n и u_n — бесконечно малые; x_n и u_n стремятся к нулю, принимая положительные значения; y_n стремится к нулю, принимая отрицательные значения, а z_n стремится к нулю, меняя знак.

Величина v_n стремится к 1.

Переменная β_n на самом деле есть постоянная, равная одному и тому же числу a для любого n.

Что же касается величины w_n, то она ни к какому числу не стремится, принимая последовательно значения +1 и –1.

Дадим формальное определение бесконечно малой величины. Переменную α_n, зависящую от натурального n, называют **бесконечно малой**, если, как бы ни было мало заданное положительное число ε, найдется число $N > 0$ настолько большое, что для всех натуральных $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$. ●

Дадим определение предела последовательности. Пусть задана переменная x_n. Если x_n можно записать в виде суммы

$$x_n = a + \alpha_n \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где a — некоторое число и α_n — бесконечно малая, то говорят, что x_n имеет своим **пределом** число a или что x_n стремится к числу a, и пишут

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a,$$

или

$$x_n \to a \ (n \to +\infty).$$

Очевидно, что если α_n — бесконечно малая, то ее предел равен нулю:

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0.$$

В частности, если $\alpha_n = 0$ для любого натурального n, то α_n — бесконечно малая.

ПРИМЕР.

а) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0;$

б) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1;$

в) $\lim\limits_{n \to +\infty} a = \lim\limits_{n \to +\infty} (a + \alpha_n) = a \ (\alpha_n = 0);$

г) предел $w_n = (-1)^n$ при $n \to +\infty$ не существует.

Наряду с бесконечно малыми величинами рассматривают и бесконечно большие величины.

Переменную x_n называют **бесконечно большой**, если, как бы ни было велико число $M > 0$, найдется такое число $N > 0$, что для всех натуральных $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > M$.

Если x_n — бесконечно большая, то пишут

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \infty,$$

или

$$x_n \to \infty \ (n \to +\infty).$$

Если бесконечно большая величина x_n, начиная с некоторого n, становится положительной, то пишут $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, если становится отрицательной, то пишут $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty$.

ПРИМЕРЫ бесконечно больших величин: $x_n = n$; $y_n = -n$; $z_n = (-1)^n n$; $u_n = n^2$.

При этом $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = -\infty$.

Что же касается величины z_n, то про нее можно написать $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = \infty$, но здесь нельзя символ ∞ заменить ни символом $+\infty$, ни символом $-\infty$.

4.24° Какой величиной — бесконечно малой или бесконечно большой — является переменная α_n, если:

а) $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$; б) $\alpha_n = \dfrac{2000}{n}$; в) $\alpha_n = \dfrac{32n}{n^2}$;

г) $\alpha_n = n$; д) $\alpha_n = n^2$; е) $\alpha_n = n^3 + 3n$?

4.25 Представьте переменную α_n в виде суммы постоянной и бесконечно малой, если:

а) $\alpha_n = \dfrac{n+1}{n}$; б) $\alpha_n = \dfrac{3n+1}{n}$; в) $\alpha_n = \dfrac{n^2+4n}{n^2}$.

4.26 Что значит, что переменная x_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) имеет предел, равный числу a? Приведите примеры.

4.27 Каким свойством обладает переменная x_n, называемая бесконечно большой? Приведите примеры.

4.28 Что значит $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty$? Приведите примеры.

4.29 Найдите предел переменной, представив ее в виде суммы постоянной и бесконечно малой:

а) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+3}{n}$; б) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2-1}{n^2}$; в) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2-1}{n^3}$;

г) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3-3}{n^3}$; д) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+2}{n+1}$; е) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^2+2n+5}{2n^2}$.

4.30 Для заданного положительного ε укажите такое число N, что для переменной α_n для всех натуральных $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, если:

а) $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$; б) $\alpha_n = \dfrac{2}{n}$; в) $\alpha_n = \dfrac{3}{2n}$;

г) $\alpha_n = -\dfrac{5}{n}$; д) $\alpha_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; е) $\alpha_n = \dfrac{1}{n+2}$.

4.31 С помощью определения бесконечно малой величины (через ε и N) докажите, что переменная α_n — бесконечно малая величина, если:

а) $\alpha_n = \dfrac{1999}{n}$; б) $\alpha_n = \dfrac{2000}{n+10}$; в) $\alpha_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

4.32 Для заданного числа $M > 0$ укажите такое число N, что для всех натуральных $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > M$, если:

а) $x_n = n$; б) $x_n = -n$; в) $x_n = \dfrac{n}{100}$;

г) $x_n = n^2$; д) $x_n = -3n$; е) $x_n = \dfrac{n^2}{2000}$.

4.33 С помощью определения бесконечно большой величины (через M и N) докажите, что переменная x_n — бесконечно большая величина, если:

а) $x_n = 5n$; б) $x_n = -2n$; в) $x_n = \dfrac{n+5}{3}$;

г) $x_n = \dfrac{n^2+9}{n}$; д) $x_n = \dfrac{n^2-1000}{n}$; е) $x_n = \dfrac{n^2-9}{n}$.

4.4*. Свойства пределов

Переменные x_n и y_n можно складывать, вычитать, умножать и делить, образуя переменные $x_n + y_n$; $x_n - y_n$; $x_n y_n$; $\dfrac{x_n}{y_n}$. В случае частного надо предполагать, что $y_n \neq 0$ для любых $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Справедливы следующие свойства пределов:

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n; \quad (1)$$

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n - \lim_{n\to+\infty} y_n; \quad (2)$$

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n \cdot \lim_{n\to+\infty} y_n. \quad (3)$$

В частности, если $x_n = c$ — постоянная, то

$$\lim_{n\to+\infty}(cy_n) = \lim_{n\to+\infty} c \cdot \lim_{n\to+\infty} y_n = c \cdot \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Если $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n \neq 0$, то

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n}. \quad (4)$$

Эти свойства надо понимать в том смысле, что если существуют пределы, фигурирующие в правых частях равенств, то существуют пределы и в левых частях соответствующих равенств и справедливы сами равенства.

Добавим еще, что если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$; если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$ $(A \neq 0)$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n y_n) = \infty$; если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = \infty$ $(x_n \neq 0)$.

Более сложный вопрос возникает при вычислении предела частного $\frac{x_n}{y_n}$, когда и $x_n \to 0$, и $y_n \to 0$ или когда $x_n \to \infty$ и $y_n \to \infty$. В таких случаях заранее невозможно сказать, чему равен предел. В зависимости от свойств переменных x_n и y_n предел может быть любым конечным или бесконечным числом[1]. Может также случиться, что отношение не имеет никакого предела — ни конечного, ни бесконечного.

Например, пусть $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$. Тогда, очевидно, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{n^2}{n} = n \to +\infty, \qquad \frac{y_n}{x_n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Если же $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, то отношение $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ ни к какому пределу не стремится.

ПРИМЕР 1. Найдем $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+3}{n+1}$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+3}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

У дроби $\frac{n+3}{n+1}$ как числитель, так и знаменатель стремятся к бесконечности, и непосредственно нельзя сказать, к какому пределу она стремится. Однако после деления числителя и знаменателя на n обнаружилось, что числитель стремится к 1 и знаменатель стремится к 1. Это дает возможность воспользоваться формулой для вычисления предела частного.

ПРИМЕР 2. Найдем $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^4 - 100n^3 - 2n^2 + 1)$.

$$\lim_{n \to +\infty} (n^4 - 100n^3 - 2n^2 + 1) = \lim_{n \to +\infty} n^4 \left(1 - \frac{100}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right) = +\infty.$$

Здесь сразу неясно, к чему стремится исходное выражение: первый член n^4 стремится к $+\infty$, а сумма $-100n^3 - 2n^2$ стремится к $-\infty$. Но после вынесения за скобки n^4 все проясняется: множитель n^4 стремится к $+\infty$, а множитель $\left(1 - \frac{100}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right)$ стремится к $1 \neq 0$. Но тогда произведение стремится к $+\infty$.

[1] Символы $+\infty$, $-\infty$, ∞ удобно называть бесконечными числами, хотя это вовсе не числа, и тогда обычные числа называют конечными числами.

ПРИМЕР 3. Найдем $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n})$.

$$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{(\sqrt[3]{n+2})^3 - (\sqrt[3]{n})^3}{(\sqrt[3]{n+2})^2 + \sqrt[3]{n+2}\,\sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{(\sqrt[3]{n+2})^2 + \sqrt[3]{n+2}\,\sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2} = 0,$$

так как знаменатель последней дроби стремится к $+\infty$.

Не существует общего способа вычисления предела разности двух переменных, каждая из которых стремится к $+\infty$. В любом случае приходится придумывать свой способ.

Приведем доказательство утверждений (1) — (4).

Пусть $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n — бесконечно малые. Тогда

$x_n + y_n = a + b + (\alpha_n + \beta_n)$,

$x_n - y_n = a - b + (\alpha_n - \beta_n)$,

$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$,

$\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b} + \left(\dfrac{b\alpha_n - a\beta_n}{(b + \beta_n)\, b}\right)$ $(b \neq 0,\ y_n \neq 0,\ b + \beta_n \neq 0)$.

Утверждения (1) — (4) следуют из того, что выражения в скобках есть бесконечно малые. Надо считать очевидным, что сумма, разность, произведение бесконечно малых есть бесконечно малая. Также произведение постоянной на бесконечно малую есть бесконечно малая. Наконец, дробь, у которой числитель бесконечно малая, а знаменатель стремится к числу, отличному от нуля, есть, очевидно, бесконечно малая.

4.34 По каким правилам вычисляют пределы суммы, разности, произведения и частного переменных x_n и y_n?

Найдите предел **(4.35—4.37)**:

4.35 а) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+12}{n+11}$; б) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+1}{n-1}$; в) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+1}{5-3n}$;

г) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n}{n+2}$; д) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2}{2n^2-1}$; е) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2-1}{n^2+5}$;

ж) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3+n}{n^2-1}$; з) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2-n}{3-n^2}$; и) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2-1}{n^3+n}$.

4.36 а) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3+3n^2-1}{2n^3-5n+4}$; б) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^3-n+1}{4n^2+n-1}$;

в) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3-3n^2+1}{n^5-100n-1}$; г) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^3-10n+1}$.

4.37 а) $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^3 - 10n^2 + 2n)$; б) $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^4 - 100n^2 - 100)$;

в) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$; г) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n^2+6n} - \sqrt{n^2-6n})$.

4.5. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \dots,\ aq^{n-1},\ \dots\ (a \neq 0,\ q \neq 0). \qquad (1)$$

Если $q \neq 1$, то сумма первых ее n членов находится так:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n.$$

Если $|q| < 1$, то прогрессию (1) называют бесконечно убывающей геометрической прогрессией. Для такой прогрессии при $n \to +\infty$ слагаемое $\frac{a}{1-q} \cdot q^n$ стремится к нулю, поэтому существует предел S_n:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a}{1-q} \quad (|q| < 1).$$

Этот предел называют **суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии** (1) и пишут:

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots,$$

т. е. приписывают выражению

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots, \qquad (2)$$

являющемуся суммой бесконечного числа членов, число $\frac{a}{1-q}$, называемое его суммой.

Запись (2) называют также **рядом** и тогда число $S = \frac{a}{1-q}$ называют суммой ряда и говорят, что ряд (2) сходится при $|q| < 1$.

Если $|q| > 1$, то при $n \to +\infty$ имеем $q^n \frac{1}{1-q} \to \infty$ и $S_n \to \infty$.

Если $q = 1$, то при $n \to +\infty$

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = na \to +\infty.$$

Если $q = -1$, то

$$S_1 = a,\ S_2 = 0,\ S_3 = a,\ S_4 = 0,\ S_5 = a,\ \dots,$$

т. е. S_n не стремится к пределу (не имеет предела). Из сказанного следует, что если условие $|q| < 1$ не выполнено, то S_n не стремится к конечному пределу при $n \to +\infty$. В этом случае говорят, что ряд (2) расходится. Ему не приписывают никакого числа.

Вообще запись

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + \ldots, \qquad (3)$$

где a_k — числа, называют **рядом**.

Сумму $S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, где n — данное натуральное число, называют **частичной суммой ряда (3)**.

Если при $n \to +\infty$ частичная сумма ряда стремится к конечному числу S ($\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$), то говорят, что ряд (3) сходится к числу S, и число S называют **суммой ряда**. При этом пишут

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

т. е. в случае сходимости ряда (3) выражение (3) понимается как число S. В противном случае, т. е. если ряд (3) не сходится к конечному пределу, говорят, что ряд (3) расходится.

4.38 Вычислите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$; б) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots$;

в) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots$; г) $0{,}1 + 0{,}01 + \ldots + (0{,}1)^n + \ldots$.

4.39 Определите, сходится ли ряд и если сходится, то вычислите его сумму:

а) $0{,}8 + 0{,}08 + 0{,}008 + 0{,}0008 + 0{,}00008 + \ldots$;

б) $0{,}3 + 0{,}003 + 0{,}00003 + 0{,}0000003 + \ldots$;

в) $0{,}32 + 0{,}0032 + 0{,}000032 + 0{,}00000032 + \ldots$;

г) $0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}8 + 1{,}6 + \ldots$.

4.40 Докажите, что число 0,(3) есть сумма ряда

$$0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots .$$

4.41 Запишите ряд, сумма которого равна числу:

а) 0,(7); б) 0,(31); в) 0,0(25); г) 2,3(54).

4.42 Дан квадрат со стороной a. Его половину (площадью S_1) закрасили, затем половину оставшейся части квадрата (площадью S_2) закрасили и т. д. (рис. 36). Вычислите четыре первые частичные суммы ряда $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \ldots$. Вычислите n-ю частичную сумму ряда. Сходится ли этот ряд? Если сходится, то какова его сумма?

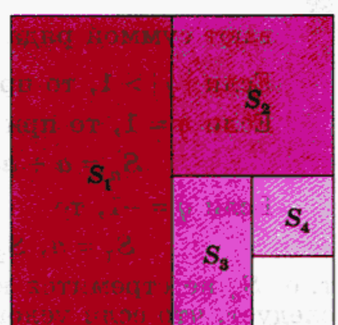
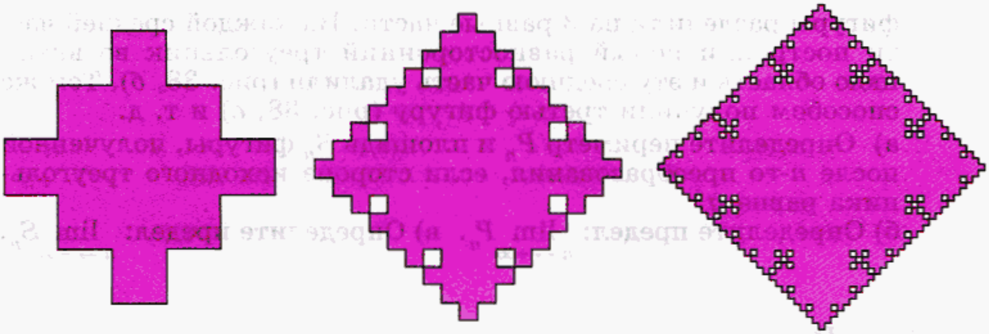


Рис. 36



а) б) в)

Рис. 37

4.43* Стороны квадрата разделили на 3 равные части. На каждой средней части во внешнюю область построили новый квадрат и эту среднюю часть удалили. Получилась фигура, изображенная на рисунке 37, *а*. Затем каждую сторону полученной фигуры разделили на 3 равные части. На каждой средней части построили новый квадрат во внешнюю область и эту среднюю часть удалили. Получилась фигура, изображенная на рисунке 37, *б*. Тем же способом получили третью фигуру (рис. 37, *в*) и т. д.

а) Определите площадь S_n фигуры, полученной после n-го преобразования, если a — сторона исходного квадрата.

б) Определите предел, к которому стремится площадь S_n фигуры при $n \to +\infty$.

4.44* Стороны равностороннего треугольника разделили на 3 равные части. На каждой средней части во внешнюю область построили новый равносторонний треугольник и эту среднюю часть удалили (рис. 38, *а*). Затем каждую сторону полученной

а) б) в)

Рис. 38

фигуры разделили на 3 равные части. На каждой средней части построили новый равносторонний треугольник во внешнюю область и эту среднюю часть удалили (рис. 38, *б*). Тем же способом получили третью фигуру (рис. 38, *в*) и т. д.

а) Определите периметр P_n и площадь S_n фигуры, полученной после n-го преобразования, если сторона исходного треугольника равна a.

б) Определите предел: $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$. в) Определите предел: $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

4.6. Число *e*

Говорят, что переменная x_n **ограничена сверху числом** M, если неравенство $x_n \leqslant M$ выполняется для любых $n = 1, 2, \ldots$; переменная x_n **не убывает**, если $x_n \leqslant x_{n+1}$ для любого n.

ТЕОРЕМА 1. Если переменная x_n не убывает и ограничена сверху числом M, то она имеет предел, равный некоторому числу a, не превышающему M: $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a \leqslant M$.

Мы не доказываем эту теорему, но проводим ниже некоторое неформальное пояснение к ней (полное доказательство приводится в курсе математического анализа для высшей школы с использованием свойства непрерывности действительных чисел).

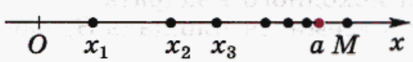


Рис. 39

Если на числовой прямой отметить точки x_1, x_2, x_3, … и точку M (рис. 39), то каждая последующая точка x_{n+1} будет находиться правее предыдущей x_n или совпадать с ней, и в то же время все точки x_n будут левее M или, может быть, какая-либо из них совпадет с M (но тогда, очевидно, и все следующие за ней точки совпадут с M).

Так как номеров n бесконечно много, то точки x_n обязательно должны сгущаться около некоторой точки $a \leqslant M$, которая и будет пределом x_n.

ПРИМЕР 1. Переменная $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ не убывает, потому что $x_n = \dfrac{n}{n+1} \leqslant x_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$; она ограничена сверху числом 1.

Переменная x_n имеет предел, равный 1:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Переменная x_n **ограничена снизу числом** m, если неравенство $m \leqslant x_n$ выполняется для любых $n = 1, 2, \ldots$.

Переменная x_n **не возрастает**, если $x_{n+1} \leqslant x_n$ для любого n.

Верна также теорема, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 1 (здесь оно не приводится).

ТЕОРЕМА 2. Если переменная x_n не возрастает и ограничена снизу числом m, то она имеет предел, равный некоторому числу A, не меньшему m: $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = A \geqslant m$.

ПРИМЕР 2. Если $0 < q < 1$, то переменная q^n убывает ($q^{n+1} < q^n$) и ограничена снизу числом 0 ($0 < q^n$). Поэтому на основании теоремы 2 существует предел

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = A \geqslant 0.$$

Замечание. Отметим, что на самом деле $A = 0$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим переменную $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Она имеет предел.

Докажем это. Рассмотрим сначала переменную

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Так как $v_n = \frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} v_{n+1}$, то, применяя неравенство (3) со с. 17 учебника, получим, что

$$v_n \geqslant \frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{n+2}{n(n+2)}\right) v_{n+1} = v_{n+1}.$$

Это означает, что переменная v_n не возрастает. Переменная v_n ограничена снизу (например, числом 0), следовательно, по теореме 2 переменная v_n имеет предел.

Переменная $u_n = \frac{v_n}{1 + \frac{1}{n}}$, поэтому она имеет предел:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n}{\lim\limits_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \to +\infty} v_n.$$

Этот предел называют числом e:

$$e = \lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459045\ldots . \qquad (1)$$

4.45° Сформулируйте теорему о существовании предела:
а) ограниченной сверху неубывающей последовательности;
б) ограниченной снизу невозрастающей последовательности.

4.46° Что такое число e?

4.47 Имеет ли предел переменная x_n, если:

а) $x_n = \dfrac{n}{n+2}$; б) $x_n = \dfrac{2n}{n+2}$; в) $x_n = \dfrac{3n+1}{n}$;

г) $x_n = \dfrac{4n-2}{n}$; д) $x_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$; е) $x_n = \dfrac{5n-2}{n+1}$?

4.48* Представим себе, что некоторый банк платит по вкладам 100% годовых независимо от срока хранения вклада — за 1 год 100%, за $\frac{1}{2}$ года 50%, за $\frac{1}{3}$ года $\frac{100\%}{3}$, за $\frac{1}{4}$ — года 25% и т. д. Составьте формулу, по которой можно найти число, показывающее, во сколько раз увеличилась вложенная сумма к концу года, если проводилось $n-1$ перевложение суммы на $\frac{1}{n}$ часть года. К чему стремится это число при $n \to +\infty$?

4.7. Понятие степени с иррациональным показателем

Пусть дано положительное число a, отличное от 1 ($a > 0$, $a \neq 1$). Мы уже знаем, как определяется число a^α, если $\alpha = r$ — число рациональное. Теперь надо понять, как определяется число a^α, если α — число иррациональное.

Начнем с примера. Определим число $3^{\sqrt{2}}$. Рассмотрим последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ (с недостатком): $r_1 = 1$; $r_2 = 1{,}4$; $r_3 = 1{,}41$; ... и последовательность чисел:

$$3^{r_1};\ 3^{r_2};\ 3^{r_3};\ \ldots . \qquad (1)$$

Переменная $x_n = 3^{r_n}$ не убывает, ограничена сверху (например, числом 3^2), поэтому по теореме 1 из п. 4.6 она имеет предел. Под числом $3^{\sqrt{2}}$ и понимают этот предел, к которому стремится последовательность (1).

Теперь рассмотрим число a, такое, что $a > 0$ и $a \neq 1$, и иррациональное число α. Пусть $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k, \ldots$ — рациональные числа, приближения числа α с недостатком, такие, что $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant \ldots \leqslant r_k \leqslant \ldots$.

Тогда под числом a^{α} понимают предел, к которому стремится последовательность $a^{r_1}; a^{r_2}; a^{r_3}; \ldots; a^{r_k}; \ldots$, т. е.

$$a^{\alpha} = \lim_{k \to +\infty} a^{r_k}, \text{ где } \alpha = \lim_{k \to +\infty} r_k.$$

Замечание. В приведенном выше определении можно взять любую последовательность r_k рациональных чисел, имеющую предел α. Значение a^{α} будет одним и тем же для любых таких последовательностей. Отметим, что $1^{\alpha} = 1$ для любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

Таким образом, теперь определена любая действительная степень положительного числа. Отметим также, что $0^{\alpha} = 0$ для любого положительного числа. Записи 0^0 и $0^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ не имеют смысла.

Можно доказать, что для числа a, такого, что $a > 0$ и $a \neq 1$, и любых действительных чисел α и β справедливы следующие основные **свойства степеней**:

1. $a^{\alpha + \beta} = a^{\alpha} \cdot a^{\beta}$.
2. $a^{\alpha - \beta} = a^{\alpha} : a^{\beta}$.
3. $a^{\alpha \cdot \beta} = (a^{\alpha})^{\beta}$.
4. Если $a > 1$ и $\alpha < \beta$, то $a^{\alpha} < a^{\beta}$.
5. Если $0 < a < 1$ и $\alpha < \beta$, то $a^{\alpha} > a^{\beta}$.

ПРИМЕР. Покажем, что $2^{\sqrt{3}} < 4$.

Действительно, так как $2 > 1$ и $\sqrt{3} < 2$, то по свойству 4 получаем $2^{\sqrt{3}} < 2^2 = 4$.

4.49 Между какими двумя соседними натуральными числами заключено число $2^{\sqrt{2}}$?

4.50 Постройте неубывающую последовательность, пределом которой является число 2^{π} $(\pi = 3{,}1415926\ldots)$.

4.51 Вычислите:

а) $2^{\sqrt{3}} \cdot 2^{2-\sqrt{3}}$; б) $9^{\pi} : 3^{2\pi - 1}$; в) $\left(5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$;

г) $3^{\sqrt{6}} \cdot 3^{1-\sqrt{6}}$; д) $4^{\pi - 2} : 4^{\pi - 3}$; е) $\left(3^{\sqrt[3]{4}}\right)^{\sqrt[3]{2}}$.

4.52 Имеет ли смысл выражение:

а) $0^{\frac{3}{2}}$; б) $0^{-\frac{1}{3}}$; в) $0^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; г) $0^{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;

д) $(-2)^{\sqrt{2}}$; е) $-2^{\sqrt{2}}$; ж) $3^{\sqrt{3}}$; з) $-1^{e-\pi}$?

4.8. Показательная функция

Рассмотрим функцию

$$y = a^x, \tag{1}$$

где $a > 0$ и $a \neq 1$, на множестве рациональных чисел. Мы уже знаем из п. 4.1, что для каждого рационального числа r определено число a^r. Этим функция (1) пока определена на множестве рациональных чисел.

График этой функции в системе координат xOy есть совокупность точек $(x; a^x)$, где x — любое рациональное число.

При $a > 1$ этот график схематически изображен на рисунке 40, а при $0 < a < 1$ — на рисунке 41. Мы изобразили эти графики точечными линиями, чтобы подчеркнуть, что функции пока заданы для рациональных чисел (точек), а рациональные точки не заполняют полностью ось Ox.

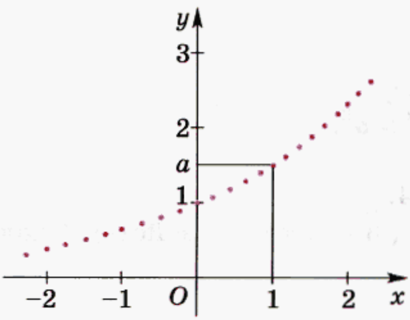


Рис. 40

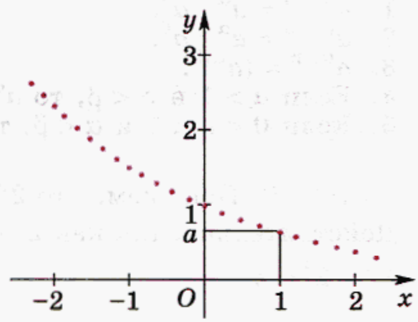


Рис. 41

Сначала отметим некоторые свойства построенных графиков, доказанные уже в п. 4.2.

1. Каждый из графиков расположен выше оси Ox, потому что при $a > 0$

$$a^x > 0 \tag{2}$$

для любых рациональных значений x.

2. При $a > 1$ график функции $y = a^x$ изображает возрастающую функцию, так как при $a > 1$

$$a^{x_1} < a^{x_2} \quad \text{для} \quad x_1 < x_2. \tag{3}$$

При этом

$$\begin{gathered} a^x \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \\ a^x \to 0 \quad \text{при} \quad x \to -\infty. \end{gathered} \tag{4}$$

Например, если x стремится к $+\infty$, пробегая числа 0, 1, 2, 3, ... , то a^x при $a > 1$ стремится к $+\infty$, пробегая числа 1, a, a^2, a^3, ...

Если же x стремится к $-\infty$, пробегая числа $-1, -2, -3, -4, \dots$, то a^x стремится к 0, пробегая числа $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, \dots$.

3. При $0 < a < 1$ график функции $y = a^x$ изображает убывающую функцию, так как при таком значении a

$$a^{x_1} > a^{x_2} \quad \text{для} \quad x_1 < x_2. \qquad (3')$$

При этом

$$a^x \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$
$$a^x \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to -\infty. \qquad (4')$$

Важно отметить, что оба точечных графика обладают еще тем свойством, что их просветы можно пополнить точками $(x; a^x)$ для иррациональных x так, что после пополнения получатся графики функций, непрерывных на промежутке $(-\infty; +\infty)$, т. е. определенных для всех действительных x.

В полном курсе математического анализа доказывается, что такое пополнение возможно, и притом единственным образом (доказательство мы опускаем).

В обоих случаях ($a > 1$ и $0 < a < 1$) полученную функцию, определенную на всей оси Ox, мы снова обозначаем

$$y = a^x.$$

Ее называют **показательной функцией** с основанием a.

При этом значения функции $y = a^x$ вычисляют для рациональных $x = \frac{p}{q}$ $(q \geqslant 2)$ по формуле $a^x = \sqrt[q]{a^p}$, а для иррациональных x по формуле

$$a^x = \lim_{r_k \to x} a^{r_k},$$

где $\{r_k\}$ — последовательность рациональных чисел, стремящихся к x.

График функции $y = a^x$ при $a > 1$ схематически изображен на рисунке 42 и при $0 < a < 1$ — на рисунке 43. Отмеченные выше свойства (2), (3), (4), (3′), (4′), которые ранее были известны лишь для рациональных чисел x, x_1, x_2, сохраняются и для действительных чисел.

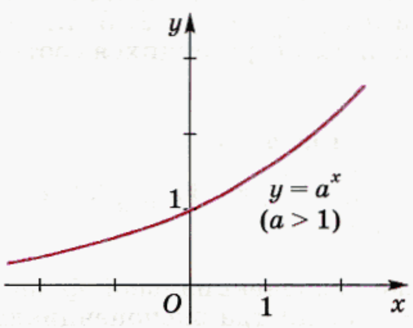


Рис. 42

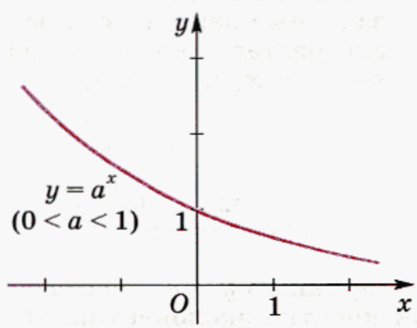


Рис. 43

Теперь добавляется еще одно свойство: функция a^x непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

На рисунке 44 в одной и той же декартовой системе координат изображены графики функций $y = 2^x$ и $y = 3^x$. А на рисунке 45 изображены графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

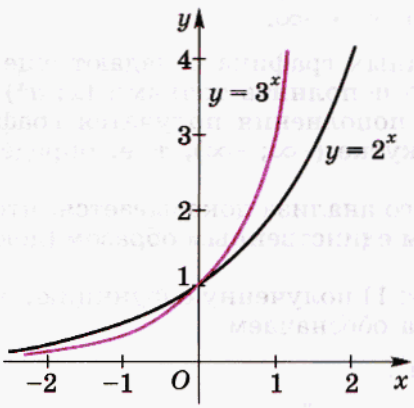


Рис. 44

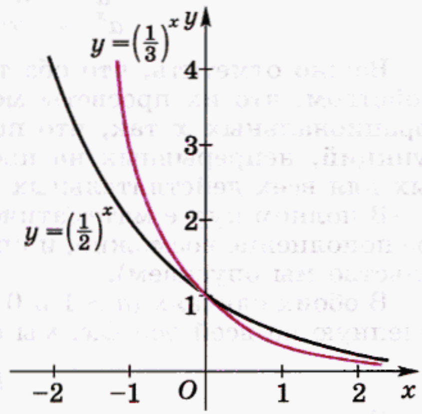


Рис. 45

Сохраняются также для любых действительных чисел x, x_1, x_2 и другие важные свойства показательной функции:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2} \quad (a > 0,\ a \neq 1),$$
$$a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1 - x_2} \quad (a > 0,\ a \neq 1), \qquad (5)$$
$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2} \quad (a > 0,\ a \neq 1).$$

Докажем только свойство (5) для любых чисел. Пусть x_1 и x_2 — заданные действительные числа и α_n, β_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — последовательности рациональных чисел, стремящихся соответственно к x_1 и x_2. Тогда

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = \lim_{\alpha_k \to x_1} a^{\alpha_k} \cdot \lim_{\beta_k \to x_2} a^{\beta_k} =$$
$$= \lim_{\alpha_k + \beta_k \to x_1 + x_2} (a^{\alpha_k} \cdot a^{\beta_k}) = \lim_{\alpha_k + \beta_k \to x_1 + x_2} a^{\alpha_k + \beta_k} = a^{x_1 + x_2}.$$

Функцию $y = e^x$ называют также экспоненциальной функцией или коротко **экспонентой**. Отметим, что иногда экспоненциальной функцией называют любую функцию $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

4.53° Перечислите свойства функции $y = a^x$ для:
а) $a > 1$; б) $0 < a < 1$.
Какие свойства функции $y = a^x$ являются общими для этих двух случаев?

4.54 Определите, возрастающей или убывающей является функция:

а) $y = 3^x$; б) $y = 3{,}5^x$; в) $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$;

г) $y = (\sqrt{2})^x$; д) $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$; е) $y = 0{,}99^x$.

4.55 Сравните:

а) $3^{3,4}$ и 3^{π}; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{2}$; в) $3^{1,5}$ и 3^0;

г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\pi}$ и 1; д) $5{,}7^{5,7}$ и 1; е) $0{,}3^{0,3}$ и 1;

ж) $0{,}5^2$ и 1; з) $2^{0,5}$ и 1; и) π^e и $3{,}2^{2,8}$.

4.56 В одной системе координат постройте графики функций $y = 2^x$ и $y = 4^x$. При каких значениях x точки первого графика расположены выше (ниже) соответствующих точек второго графика?

4.57 В одной системе координат постройте графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. При каких значениях x точки первого графика расположены выше (ниже) соответствующих точек второго графика?

4.58 В одной системе координат постройте графики функций $y = 3^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Каким свойством обладают графики этих функций?

4.59 Определите графическим способом, сколько корней имеет уравнение $2^x = x^2$.

Постройте график функции **(4.60—4.61)**:

4.60 а) $y = 2^x$; б) $y = 2^{-x}$; в) $y = 2^{|x|}$;
г) $y = 2^{x+3}$; д) $y = 2^{-x+3}$; е) $y = 2^{|x|+3}$;
ж) $y = 2^x - 1$; з) $y = |2^x - 1|$; и) $y = |2^{x-1} - 2|$.

4.61 а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$;   б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$;   в) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$;

г) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$;   д) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1}$;   е) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|+2}$;

ж) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 3$;   з) $y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 2\right|$.

§ 5. Логарифмы

5.1. Понятие логарифма

По графику функции $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) (см. рис. 42 и 43) можно найти число a^α для любого действительного числа α. Но этот же график дает возможность решить и обратную задачу: для данных положительных чисел b и a ($a \neq 1$) найти число α, такое, что $b = a^\alpha$.

Для этого надо отметить на оси Oy точку, имеющую координаты $(0; b)$, и через нее провести прямую $y = b$, параллельную оси Ox. Она пересечет график функции $y = a^x$ в единственной точке M (рис. 46, *а*, *б*). Абсцисса α точки M и удовлетворяет условию $b = a^\alpha$. Полученное таким образом число α единственное, удовлетворяющее этому условию.

Следовательно, для любого положительного числа b существует, и притом только одно, число α, такое, что $b = a^\alpha$. Это число называют логарифмом числа b по основанию a.

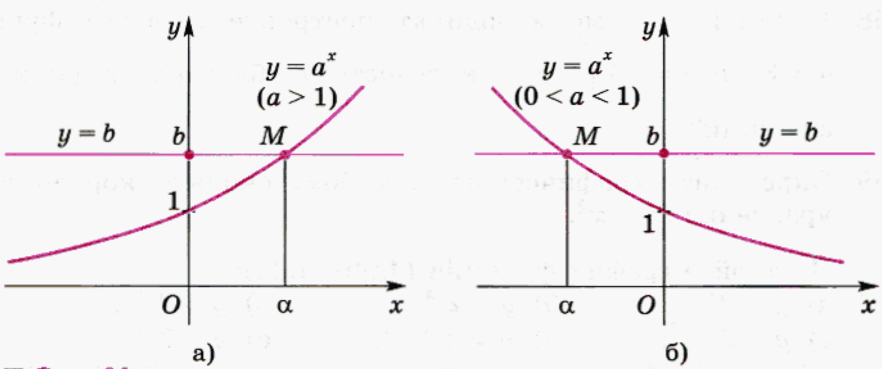


Рис. 46

Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называют число α, такое, что $b = a^{\alpha}$.

Логарифм положительного числа b по основанию a ($a \neq 1$, $a > 0$) обозначают так:

$$\alpha = \log_a b.$$

Из определения логарифма очевидно следует, что для $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$

$$a^{\log_a b} = b.$$

Подчеркнем, что a^{α} есть положительное число для любого α (положительного, отрицательного или нуля). Отсюда следует, что логарифм отрицательного числа, так же как логарифм нуля, не существует (не имеет смысла).

ПРИМЕРЫ вычисления логарифмов:

а) $\log_2 1 = 0$, так как $1 = 2^0$;

б) $\log_{0,01} 0,01 = 1$, так как $0,01 = 0,01^1$;

в) $\log_3 27 = 3$, так как $27 = 3^3$;

г) $\log_5 125 = 3$, так как $125 = 5^3$;

д) $\log_{10} 0,001 = -3$, так как $0,001 = 10^{-3}$.

Логарифм положительного числа b по основанию e называют **натуральным логарифмом числа b** и обозначают $\ln b$, т. е. вместо $\log_e b$ пишут $\ln b$.

ПРИМЕРЫ вычисления натуральных логарифмов:

а) $\ln e^3 = 3$;

б) $\ln \frac{1}{e} = -1$;

в) $\ln e^{\pi} = \pi$.

Логарифм положительного числа b по основанию 10 называют **десятичным логарифмом** числа b и обозначают $\lg b$, т. е. вместо $\log_{10} b$ пишут $\lg b$.

ПРИМЕРЫ вычисления десятичных логарифмов:

а) $\lg 1 = 0$, так как $1 = 10^0$;

б) $\lg 10 = 1$, так как $10 = 10^1$;

в) $\lg 100 = 2$, так как $100 = 10^2$;

г) $\lg 1000 = 3$, так как $1000 = 10^3$;

д) $\lg 0,1 = -1$, так как $0,1 = 10^{-1}$;

е) $\lg 0,01 = -2$, так как $0,01 = 10^{-2}$;

ж) $\lg 0,001 = -3$, так как $0,001 = 10^{-3}$.

Замечание. В курсе математического анализа для высшей школы очевидный факт существования точки M в приведенных выше рассуждениях доказывается на основании свойства непрерывности действительных чисел.

5.1° Что называют логарифмом положительного числа b по основанию a $(a > 0,\ a \neq 1)$?

5.2° Существует ли логарифм нуля; отрицательного числа?

5.3 Докажите, что:
а) $\log_2 8 = 3$; б) $\log_5 \dfrac{1}{25} = -2$; в) $\log_{0,1} 1 = 0$.

Вычислите (5.4—5.5):

5.4 а) $\log_2 4$; б) $\log_2 16$; в) $\log_3 3$;
г) $\log_3 27$; д) $\log_4 1$; е) $\log_5 \dfrac{1}{5}$;
ж) $\log_{10} 100$; з) $\log_5 5^3$; и) $\log_7 7^5$.

5.5 а) $2^{\log_2 3}$; б) $3^{\log_3 5}$; в) $7^{\log_7 9}$;
г) $2^{\log_2 3 + \log_2 5}$; д) $(3^{\log_3 7})^2$; е) $(3^2)^{\log_3 7}$;
ж) $7^{2 \log_7 3}$; з) $10^{3 \log_{10} 5}$; и) $0{,}1^{2 \log_{0,1} 10}$.

5.6° Логарифм по какому основанию называют: а) натуральным; б) десятичным?
Как обозначают эти логарифмы?

Вычислите (5.7—5.9):

5.7 а) $\log_e e$; б) $\log_e e^2$; в) $\log_e \dfrac{1}{e}$;
г) $\ln e$; д) $\ln e^3$; е) $\ln \dfrac{1}{e}$;
ж) $\ln e^n$; з) $\ln \sqrt{e}$; и) $\ln \sqrt[3]{\dfrac{1}{e}}$.

5.8 а) $\log_{10} 10$; б) $\log_{10} 100$; в) $\log_{10} 0{,}1$;
г) $\lg 10$; д) $\lg 1000$; е) $\lg 0{,}01$;
ж) $\lg 10^n$; з) $\lg \sqrt{10}$; и) $\lg \sqrt[3]{0{,}01}$.

5.9 а) $\log_2 2^3$; б) $\log_5 5^7$; в) $\log_9 9^{1999}$;
г) $2^{\log_2 5}$; д) $3^{\log_3 90}$; е) $5^{\log_5 \frac{1}{2}}$;
ж) $e^{\ln 3}$; з) $e^{2 \ln 5}$; и) $e^{-2 \ln 3}$;
к) $10^{\lg 3}$; л) $10^{2 \lg 3}$; м) $10^{-3 \lg 2}$.

5.2. Свойства логарифмов

ТЕОРЕМА. **Пусть a, M и N — положительные числа, причем $a \neq 1$, и γ — действительное число. Тогда справедливы равенства**

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N, \qquad (1)$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N, \qquad (2)$$

$$\log_a M^\gamma = \gamma \log_a M. \qquad (3)$$

Доказательство. Представим числа M и N следующим образом:

$$M = a^\alpha, \text{ где } \alpha = \log_a M,$$
$$N = a^\beta, \text{ где } \beta = \log_a N.$$

Тогда $M \cdot N = a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha + \beta}$, откуда

$$\log_a (M \cdot N) = \alpha + \beta = \log_a M + \log_a N,$$

и мы доказали равенство (1).

Далее,

$$\frac{M}{N} = \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha - \beta},$$

откуда

$$\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \alpha - \beta = \log_a M - \log_a N,$$

и мы доказали равенство (2).

Имеем также

$$M^\gamma = (a^\alpha)^\gamma = a^{\alpha\gamma},$$

откуда

$$\log_a M^\gamma = \alpha \cdot \gamma = \gamma \log_a M,$$

и мы доказали равенство (3).

Теорема доказана.

Указанные свойства логарифмов удобны для запоминания в следующих формулировках:

Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел.

Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя.

Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм этого числа.

ПРИМЕР 1.

а) $\log_{10} 5 + \log_{10} 20 = \log_{10}(5 \cdot 20) = \log_{10} 100 = 2;$

б) $\log_3 54 - \log_3 2 = \log_3 \frac{54}{2} = \log_3 27 = 3;$

в) $\log_2 4^3 = 3 \log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6.$

Для положительных чисел a, b и M, таких, что $a \neq 1$ и $b \neq 1$, справедливо также следующее равенство:

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}. \tag{4}$$

Это равенство называют формулой перехода логарифмов от одного основания к другому.

Докажем равенство (4). В силу свойства (3) имеем

$$\log_b a^{\log_a M} = \log_a M \cdot \log_b a.$$

Заменим $a^{\log_a M}$ равным ему числом M:

$$\log_b M = \log_a M \cdot \log_b a. \tag{5}$$

Так как $a \neq 1$, то $\log_b a \neq 0$. Разделив правую и левую части равенства (5) на $\log_b a$, получим равенство (4).

Заменив в равенстве (4) число M на число b ($b \neq 1$) и учитывая, что $\log_b b = 1$, получим равенство

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

ПРИМЕР 2.

а) $\frac{\log_3 25}{\log_3 5} = \log_5 25 = 2;$

б) $\log_3 6 - \frac{1}{\log_2 3} = \log_3 6 - \log_3 2 = \log_3 \frac{6}{2} = \log_3 3 = 1;$

в) $5^{\frac{1}{\log_4 5}} = 5^{\log_5 4} = 4.$

5.10 Сформулируйте свойства логарифмов положительных чисел, запишите их в виде равенств.

Вычислите (**5.11—5.18**):

5.11 а) $\log_2 4^3$; б) $\log_3 9^2$; в) $\log_5 25^{-1}$;
г) $\log_7 49^4$; д) $\log_4 64^{-2}$; е) $\log_6 36^{-4}$.

5.12 а) $\log_{\frac{1}{2}} 2$; б) $\log_{\frac{1}{2}} 8^3$; в) $\log_{\frac{1}{2}} 4^2$;
г) $\log_3 \frac{1}{3}$; д) $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)^3$; е) $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right)^5$.

5.13 а) $\log_{\sqrt{2}} 2$; б) $\log_2 \sqrt{2}$; в) $\log_3 \sqrt{3^3}$;
г) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{27}$; д) $\log_{\sqrt{5}} 5^3$; е) $\log_5 \sqrt{5^5}$.

5.14 а) $4^{\log_2 3}$; б) $9^{\log_3 5}$; в) $49^{\log_7 3}$;
г) $25^{\log_5 9}$; д) $8^{\log_2 7}$; е) $36^{\log_6 2}$.

5.15 а) $2^{\log_{\sqrt{2}} 3}$; б) $3^{\log_{\sqrt{3}} 7}$; в) $(\sqrt{3})^{\log_3 5}$;
г) $5^{\log_{\sqrt[3]{5}} 2}$; д) $6^{\log_{\sqrt[3]{6}} 3}$; е) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\log_5 2}$.

5.16 а) $\log_2 \sqrt[3]{16}$; б) $\log_3 (27\sqrt{3})$; в) $\log_5 \sqrt{5\sqrt{5}}$;
г) $\log_{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} 9$; д) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt[3]{128\sqrt{2}}$.

5.17 а) $\log_6 2 + \log_6 3$; б) $\log_8 \frac{8}{7} + \log_8 \frac{7}{8}$;
в) $\log_{15} 5 + \log_{15} 3$; г) $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 6$;
д) $\log_2 \frac{2}{5} + \log_2 10$; е) $\log_3 \frac{9}{10} + \log_3 30$.

5.18 а) $\log_2 6 - \log_2 3$; б) $\log_5 75 - \log_5 3$;
в) $\log_3 36 - \log_3 4$; г) $\log_4 48 - \log_4 3$;
д) $\log_7 \frac{49}{50} - \log_7 \frac{7}{50}$; е) $\log_3 \frac{81}{100} - \log_3 \frac{3}{100}$.

5.19 Используя свойство (3) логарифмов, преобразуйте выражение:
а) $\log_2 3^2$; б) $\log_4 5^6$; в) $\log_3 4^5$;
г) $2\log_2 3$; д) $3\log_4 7$; е) $2\log_3 4$.

5.20 Вычислите:
а) $2\log_6 2 + \log_6 9$; б) $\log_5 100 - 2\log_5 2$;
в) $4\log_{12} 2 + 2\log_{12} 3$; г) $\log_{11} 484 - 2\log_{11} 2$.

5.21* Докажите, что для $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ и любого γ ($\gamma \neq 0$)

$$\log_a b = \log_{a^\gamma} b^\gamma.$$

Пользуясь указанным свойством, вычислите:

а) $\log_{5^2} 125^2$; б) $\log_{4^2} 16^2$; в) $\log_{25^2} 125^2$;

г) $\log_{7^3} 49^3$; д) $\log_4 8^2$; е) $\log_{25} 125^2$;

ж) $\log_{100} 10^{2\pi}$; з) $\log_4 2^e$; и) $\log_{\sqrt{3}} 9^{\pi}$.

5.22 Выразите через логарифмы по основанию 2 и упростите:

а) $\log_3 5$; б) $\log_4 8$; в) $\log_5 9$; г) $\log_{16} 32$;

д) $\log_4 2$; е) $\log_8 2$; ж) $\log_{16} 2$; з) $\log_{\frac{1}{2}} 2$;

и) $\log_{\frac{1}{4}} 2$; к) $\log_{\frac{1}{8}} 2$; л) $\log_{\frac{1}{16}} 2$; м) $\log_{\frac{1}{32}} 2$.

5.23 Вычислите:

а) $2^{\frac{1}{\log_5 2}}$; б) $3^{\frac{1}{\log_5 3}}$; в) $7^{\frac{1}{\log_2 7}}$;

г) $10^{\frac{1}{\log_2 10}}$; д) $5^{\frac{1}{\log_7 5}}$; е) $6^{\frac{1}{\log_2 6}}$.

5.24 Найдите значение числового выражения:

а) $\log_3 27 - \log_{\sqrt{3}} 27 - \log_{\frac{1}{3}} 27 - \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{64}{27}\right)$;

б) $\log_{0,4}\left(\frac{1}{5}\cdot\sqrt[3]{50}\right) + \log_{0,6}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \log_{0,32}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$;

в) $\left(\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} + 6\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\right) - 2\log_{\frac{1}{16}}\left(\frac{1}{4}\right)\right) : \log_{\sqrt{2}}\sqrt[5]{8}$.

Вычислите (5.25—5.27):

5.25 а) $6^{\log_{36} 25}$; б) $7^{\log_{49} 36}$; в) $4^{\frac{1}{2\log_{625} 16}}$.

5.26 а) $\frac{\log_2 3\cdot\log_3 4}{\log_2 4}\cdot\log_5 25$; б) $\frac{\log_2 6\cdot\log_6 9}{\log_2 9}\cdot 6^{\log_6 5}$;

в) $\log_2 3\cdot\log_3 2\cdot 7^{2\log_7 3}$; г) $\log_7 8\cdot\log_8 7\cdot 3^{\log_9 49}$.

5.27* а) $3^{\log_{3\sqrt{9}} 4} + 2^{\frac{1}{\log_{16} 4}}$; б) $3^{\log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{\log_2 3}{\log_2 9}}$;

в) $\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$; г) $\frac{3+\log_{12} 27}{3-\log_{12} 27}\cdot\log_6 16$.

5.3. Логарифмическая функция

Пусть a — положительное, не равное 1 число. Каждому положительному числу x поставим в соответствие число y, равное логарифму числа x по основанию a. Иными словами, на множестве положительных чисел определим функцию

$$y = \log_a x. \tag{1}$$

Функцию $y = \log_a x$ называют **логарифмической функцией.** Областью ее определения является множество всех положительных чисел.

Построим график функции (1) при $a > 1$. Для этого сначала построим в системе координат xOy график показательной функции

$$x = a^y$$

для всех $y \in (-\infty; +\infty)$.

Каждая точка графика функции $x = a^y$ имеет координаты $(a^y; y)$. А совокупность точек $(a^y; y)$, соответствующих любым действительным числам y, и есть график функции $x = a^y$ — кривая Г (рис. 47).

Заметим, что для $x > 0$ равенства

$$x = a^y \quad \text{и} \quad y = \log_a x$$

выражают одну и ту же зависимость между x и y. При этом, когда y пробегает любые действительные значения, x пробегает любые положительные значения (см. рис. 47). Поэтому можно считать, что кривая Г есть также совокупность точек $(x; \log_a x)$, соответствующих любым положительным значениям x.

Иначе говоря, кривая Г, изображенная на рисунке 47, есть одновременно и график функции $x = a^y$ $(-\infty < y < +\infty)$, и график функции $y = \log_a x$ $(x > 0)$.

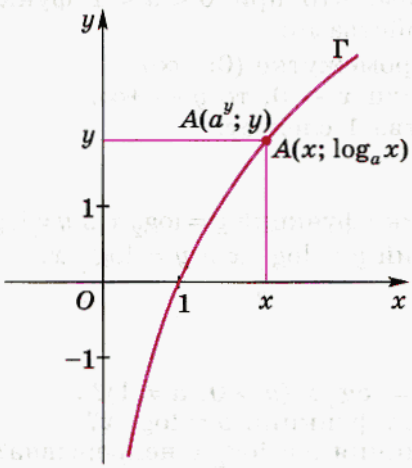


Рис. 47

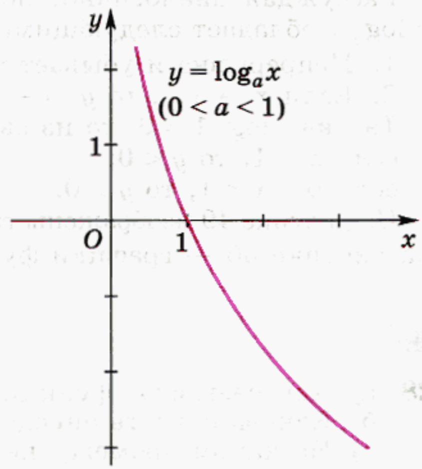


Рис. 48

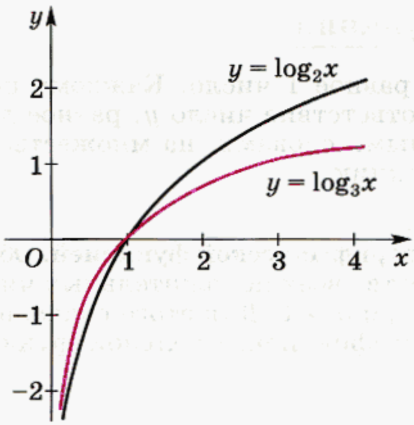


Рис. 49

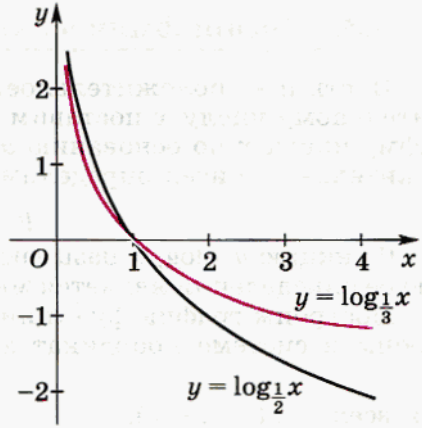


Рис. 50

Если y непрерывно возрастает, пробегая интервал $(-\infty; +\infty)$, то $x = a^y$, в свою очередь, непрерывно возрастает, пробегая интервал $(0; +\infty)$. Верно и обратное утверждение.

Таким образом, при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ обладает следующими свойствами:

1. Непрерывна и возрастает на промежутке $(0; +\infty)$.
2. Если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$; если $x \to 0$, то $y \to -\infty$.

Так как $\log_a 1 = 0$, то из свойства 1 следует:
если $x > 1$, то $y > 0$;
если $0 < x < 1$, то $y < 0$.

На рисунке 48 изображен график функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$.

Рассуждая аналогично, получим, что при $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ обладает следующими свойствами:

1. Непрерывна и убывает на промежутке $(0; +\infty)$.
2. Если $x \to +\infty$, то $y \to -\infty$; если $x \to 0$, то $y \to +\infty$.

Так как $\log_a 1 = 0$, то из свойства 1 следует:
если $x > 1$, то $y < 0$;
если $0 < x < 1$, то $y > 0$.

На рисунке 49 изображены графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$, а на рисунке 50 — графики функций $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

5.28° а) Как называют функцию $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$?
б) Какова область определения функции $y = \log_a x$?
в) На каком промежутке функция $y = \log_a x$ непрерывна?

5.29 Для каких a функция $y = \log_a x$: а) возрастает; б) убывает?

5.30 Для каких x функция $y = \log_a x$ $(a > 1)$:
а) положительна; б) отрицательна?

5.31 Для каких x функция $y = \log_a x$ $(0 < a < 1)$:
а) положительна; б) отрицательна?

5.32 В одной системе координат постройте графики функций:
а) $y = \log_2 x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; б) $y = \log_3 x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$;
в) $y = \log_4 x$ и $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.
Перечислите общие, различные свойства этих двух функций.

5.33 Используя свойства логарифмической функции, сравните:
а) $\log_2 3$ и $\log_2 5$; б) $\log_2 \frac{1}{3}$ и $\log_2 \frac{1}{5}$;
в) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ и $\log_{\frac{1}{2}} 5$; г) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$.

5.34 На каком числовом промежутке точки графика функции $y = \log_2 x$ расположены выше (ниже) соответствующих точек графика функции $y = \log_4 x$?

Постройте график функции (**5.35—5.36**):

5.35 а) $y = \log_2 x$; б) $y = \log_2 (-x)$; в) $y = \log_2 |x|$;
г) $y = \log_2 (x - 3)$; д) $y = \log_2 (-x + 3)$; е) $y = \log_2 |x + 2|$;
ж) $y = |\log_2 x|$; з) $y = |\log_2 x - 2|$; и) $y = |\log_2 (x - 2) - 1|$.

5.36 а) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}} (-x)$; в) $y = \log_{\frac{1}{2}} |x|$;
г) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x - 1)$; д) $y = \log_{\frac{1}{2}} (-x - 1)$; е) $y = \log_{\frac{1}{2}} |x - 1|$;
ж) $y = |\log_{\frac{1}{2}} x|$; з) $y = |\log_{\frac{1}{2}} x - 2|$; и) $y = |\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) - 2|$.

5.4*. Десятичные логарифмы

Пусть надо вычислить десятичный логарифм положительного числа A. Запишем число A в стандартном виде:

$$A = a \cdot 10^k,$$

где $1 \leqslant a < 10$, k — целое число.

По свойству логарифмов

$$\lg A = \lg (a \cdot 10^k) = \lg a + \lg 10^k = \lg a + k. \qquad (1)$$

Число k называют **характеристикой логарифма числа** A, число $\lg a$ — **мантиссой логарифма числа** A.

Характеристика есть число целое (положительное, отрицательное или нуль). Мантисса есть неотрицательное число, меньшее 1, точнее, при $a = 1$ она есть нуль, а в остальных случаях — положительное число, меньшее 1.

Действительно, в силу возрастания функции $y = \lg x$ из условия $1 \leqslant a < 10$ следует:

$$0 = \lg 1 \leqslant \lg a < \lg 10 = 1.$$

Сумму (1) обычно записывают специальным образом так, как это будет видно из примеров.

ПРИМЕР 1. Вычислим $\lg 0{,}123$.

Запишем в стандартном виде число 0,123:

$$0{,}123 = 1{,}23 \cdot 10^{-1}.$$

Тогда $\lg 0{,}123 = \lg 1{,}23 + (-1) \approx 0{,}0899 + (-1) = -0{,}9101$.

Удобно вести запись так: $0{,}0899 + (-1) = \bar{1}{,}0899$, тогда приведенные вычисления можно записать так: $\lg 0{,}123 = \lg 1{,}23 + (-1) \approx$ $\approx 0{,}0899 + (-1) = \bar{1}{,}0899 = -0{,}9101$.

ПРИМЕР 2. Вычислим $\lg 373{,}2$.

Так как $373{,}2 = 3{,}732 \cdot 10^2$, то $\lg 373{,}2 = \lg 3{,}732 + 2 \approx 0{,}5719 +$ $+ 2 = 2{,}5719$.

ПРИМЕР 3. Вычислим $\lg 0{,}00324$.

Так как $0{,}00324 = 3{,}24 \cdot 10^{-3}$, то $\lg 0{,}00324 = \lg 3{,}24 + (-3) \approx$ $\approx 0{,}5105 + (-3) = \bar{3}{,}5105 = -2{,}4895$.

Иногда приходится решать и обратную задачу: зная (приближенно) десятичный логарифм числа, находить (приближенно) это число.

Чтобы найти число A по данному $\lg A$, надо возвести число 10 в степень $\lg A$.

ПРИМЕР 4. Пусть $\lg A \approx 1{,}23$. Найдем A.

$A = 10^{\lg A} \approx 10^1 \cdot 10^{0{,}23} \approx 10^1 \cdot 1{,}698 = 16{,}98$.

ПРИМЕР 5. Пусть $\lg A \approx -1{,}23$. Найдем A.

$$A = 10^{\lg A} \approx 10^{-1{,}23} = 10^{-2} \cdot 10^{0{,}77} = \frac{10^{0{,}77}}{10^2} \approx \frac{5{,}888}{10^2} = 0{,}05888.$$

Замечание. Здесь и далее мантиссы логарифмов и антилогарифмы чисел находятся приближенно при помощи таблиц, дающих в ответе четыре значащие цифры. Калькулятор, выполняющий эти операции, позволяет получать больше четырех значащих цифр.

5.37° Что называют характеристикой и мантиссой десятичного логарифма?

5.38 Определите характеристику и мантиссу десятичного логарифма:
а) $\lg 1999$; б) $\lg 2000$; в) $\lg 0{,}423$;
г) $\lg 0{,}035$; д) $\lg 345$; е) $\lg 0{,}0007$.

С помощью таблиц мантисс логарифмов вычислите приближенно **(5.39—5.40)**:

5.39 а) $\lg 3{,}54$; б) $\lg 35{,}4$; в) $\lg 354$;
г) $\lg 0{,}354$; д) $\lg 0{,}0354$; е) $\lg 3540$.

5.40 а) $\lg 7{,}28$; б) $\lg 39{,}8$; в) $\lg 756$;
г) $\lg 0{,}32$; д) $\lg 0{,}0572$; е) $\lg 0{,}00137$.

С помощью таблиц антилогарифмов найдите приближенно A, если **(5.41—5.42)**:

5.41 а) $\lg A = 0{,}48$; б) $\lg A = 1{,}48$; в) $\lg A = -0{,}52$;
г) $\lg A = -1{,}52$; д) $\lg A = 3{,}48$; е) $\lg A = -2{,}52$.

5.42 а) $\lg A = 0{,}57$; б) $\lg A = 1{,}28$; в) $\lg A = 2{,}54$;
г) $\lg A = -0{,}44$; д) $\lg A = -1{,}28$; е) $\lg A = -2{,}72$.

5.5*. Степенные функции

Функцию вида

$$y = x^{\beta}, \tag{1}$$

где β — данное действительное число, называют **степенной функцией**.

Например, степенными функциями являются функции $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^3$, $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = x^{-\frac{2}{3}}$.

В зависимости от числа β каждая такая функция имеет свою область определения. Однако любая степенная функция определена во всяком случае на множестве положительных чисел, т. е. на интервале $(0; +\infty)$.

Действительно, если дано положительное число x, то запись x^{β} имеет смысл — это есть положительное число — для любого действительного числа β (натурального, целого, рационального, иррационального), причем известно, как это число найти.

Поэтому для любого данного числа β на множестве $(0; +\infty)$ можно задать функцию $y = x^{\beta}$.

Если число $\beta > 0$, то принято считать, что $0^\beta = 0$, поэтому при любом $\beta > 0$ точка $x = 0$ входит в область определения функции $y = x^\beta$, т. е. эта функция определена во всяком случае на полуинтервале $[0; +\infty)$.

Если число $\beta \leqslant 0$, то запись 0^β не имеет смысла. Поэтому при любом $\beta \leqslant 0$ точка $x = 0$ не входит в область определения функции $y = x^\beta$.

Рассмотрим частные случаи степенных функций.

1. Пусть $\beta = n$, где n — данное натуральное число. Степенные функции

$$y = x^n \qquad (2)$$

для натуральных чисел n уже изучались ранее. Каждая такая функция определена для всех действительных x, т. е. областью ее определения является числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$. Каждая такая функция непрерывна на всей своей области определения и на полуинтервале $[0; +\infty)$ возрастает, принимая все значения из промежутка $[0; +\infty)$.

При n нечетном функция (2) нечетная, ее график симметричен относительно начала координат. На рисунке 51 приведены графики функций (2) для $n = 1$ и $n = 3$.

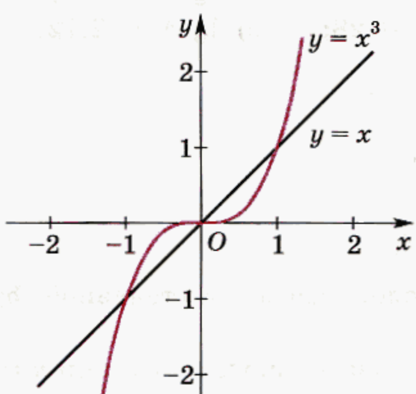


Рис. 51

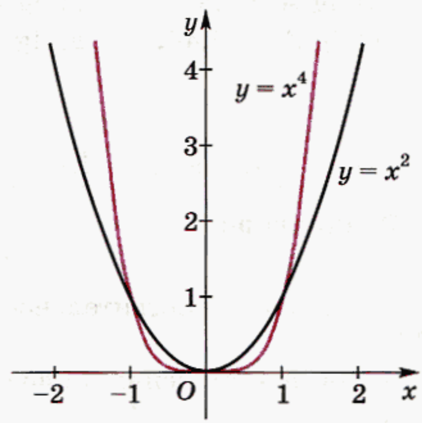


Рис. 52

При n четном функция (2) четная, ее график симметричен относительно оси Oy. На рисунке 52 приведены графики функций (2) для $n = 2$ и $n = 4$.

2. Пусть $\beta = -n$, где n — данное натуральное число. Степенная функция

$$y = x^{-n} \qquad (3)$$

при любом натуральном n определена для всех действительных чисел x, кроме $x = 0$, т. е. областью ее определения является объеди-

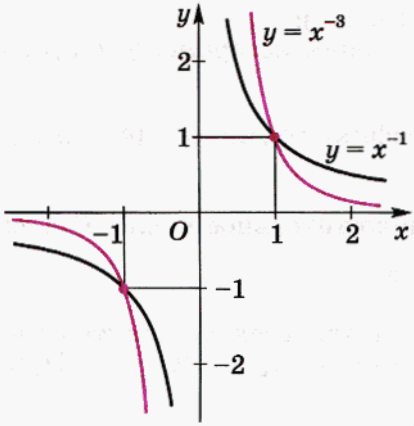


Рис. 53

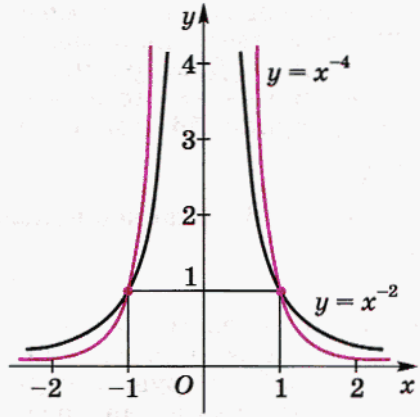


Рис. 54

нение двух промежутков: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. При любом натуральном n функция (3) на промежутке $(0; +\infty)$:

1) непрерывна;
2) убывает, принимая все значения из промежутка $(0; +\infty)$;
3) $y > 0$ для любого $x \in (0; +\infty)$;
4) $y \to +\infty$ при $x \to 0$;
5) $y \to 0$ при $x \to +\infty$.

Свойства этой функции для отрицательных x, т. е. для $x \in (-\infty; 0)$, следуют из того, что она четная при n четном и нечетная при n нечетном. На рисунке 53 приведены графики функций (3) для $n = 1$ и $n = 3$, на рисунке 54 — для $n = 2$ и $n = 4$.

3. Пусть $\beta = 0$. Напомним, что запись 0^0 не имеет смысла, поэтому область определения функции $y = x^0$ есть множество всех действительных $x \neq 0$, т. е. объединение двух промежутков: $(-\infty; 0) \cup$ $\cup (0; +\infty)$. Поскольку $x^0 = 1$ для любого $x \neq 0$, то график этой функции есть прямая $y = 1$ без точки $(0; 1)$. На рисунке 55 эта точка показана кружком.

4. Пусть β — даное нецелое положительное число. Степенная функция

$$y = x^{\beta} \qquad (4)$$

при любом нецелом $\beta > 0$ определена для всех неотрицательных x, т. е. областью ее определения является полуинтервал $[0; +\infty)$. При любом нецелом $\beta > 0$ функция (4):

1) определена на промежутке $[0; +\infty)$;

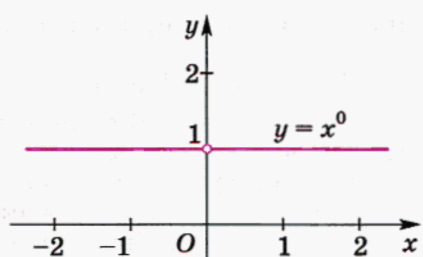


Рис. 55

2) непрерывна на промежутке $[0; +\infty)$;
3) возрастает, принимая все значения из промежутка $[0; +\infty)$;
4) если $x > 0$, то $y > 0$;
5) если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$.

На рисунке 56 приведены графики функций (4) для $\beta = \frac{1}{3}$ и $\beta = \frac{5}{3}$.

5. Пусть β — данное нецелое положительное число. Степенная функция

$$y = x^{-\beta} \tag{5}$$

при любом нецелом $\beta > 0$ определена для всех положительных x, т. е. областью ее определения является интервал $(0; +\infty)$. При любом нецелом $\beta > 0$ функция (5):
1) определена на интервале $(0; +\infty)$;
2) непрерывна на интервале $(0; +\infty)$;
3) убывает, принимая все значения из промежутка $(0; +\infty)$;
4) если $x \to +\infty$, то $y \to 0$;
5) если $x \to 0$, то $y \to +\infty$.

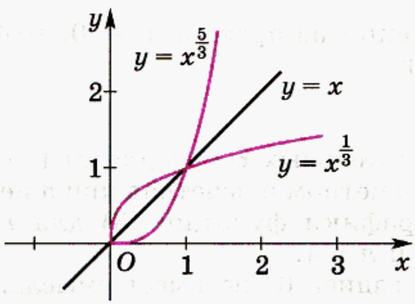


Рис. 56

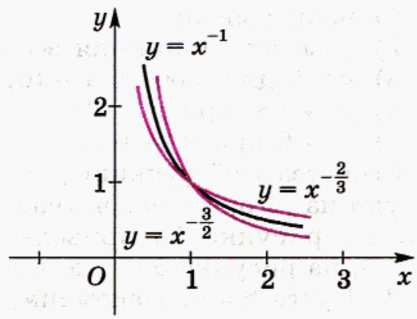


Рис. 57

На рисунке 57 приведены графики функций (5) для $\beta = \frac{2}{3}$ и $\beta = \frac{3}{2}$. Отметим, что характер убывания этих функций различный при $0 < x < 1$ и при $x > 1$, а именно $x^{-\frac{3}{2}} > x^{-1} > x^{-\frac{2}{3}}$ при $0 < x < 1$ и $x^{-\frac{3}{2}} < x^{-1} < x^{-\frac{2}{3}}$ при $x > 1$ (см. рис. 57).

Замечание 1. В определении функций (4) и (5) можно считать, что число β может быть и натуральным числом, но области определения этих функций сужены: для функций вида (4) область определения $[0; +\infty)$, а для функций вида (5) область определения $(0; +\infty)$.

Замечание 2. Свойства степенных функций (2) — (5) приведены без доказательства; часть из них была доказана ранее (см., например, § 3), остальные будут доказаны в дальнейшем.

Замечание 3. Если рассматривать функцию (1) при любом β только для положительных x, то ее можно записать в виде

$$y = b^{\beta \log_b x}, \tag{6}$$

где b — любое положительное, не равное 1 число. Действительно, используя свойства логарифмов, имеем

$$x^\beta = b^{\log_b x^\beta} = b^{\beta \log_b x}.$$

В частности, если $b = e$, то формула (6) примет вид

$$y = e^{\beta \ln x}. \tag{7}$$

Замечание 4. Любая степенная функция (1) обладает следующим характерным для нее свойством: для любого действительного числа β и любых положительных чисел x_1 и x_2 справедливо равенство

$$(x_1 \cdot x_2)^\beta = x_1^\beta \cdot x_2^\beta.$$

Действительно, используя равенство (7), свойства логарифмов и показательной функции, имеем

$$(x_1 \cdot x_2)^\beta = e^{\beta \ln(x_1 \cdot x_2)} = e^{\beta(\ln x_1 + \ln x_2)} = e^{\beta \ln x_1} \cdot e^{\beta \ln x_2} = x_1^\beta \cdot x_2^\beta.$$

5.43° Какую функцию называют степенной? Приведите примеры степенных функций.

5.44° Входит ли число 0 в область определения функции $y = x^\beta$, если $\beta > 0$?

5.45° Какова область определения функции $y = x^\beta$, если:
а) $\beta > 0$; б) $\beta \leqslant 0$?

5.46° Какими свойствами обладает функция $y = x^n$, $n \in N$, если:
а) n — четное число; б) n — нечетное число?

5.47° Какими свойствами обладает функция $y = x^{-n}$, $n \in N$, если:
а) n — четное число; б) n — нечетное число?

5.48 Постройте график функции:
а) $y = x^2$; б) $y = x^4$; в) $y = x^3$;
г) $y = x^5$; д) $y = x^{-1}$; е) $y = x^{-3}$;
ж) $y = x^{-2}$; з) $y = x^{-4}$.

5.49 В одной системе координат постройте графики функций:
а) $y = x^{\frac{1}{2}}$ и $y = x^{\frac{3}{2}}$; б) $y = x^{\frac{1}{3}}$ и $y = x^{\frac{4}{3}}$;
в) $y = x^{-\frac{1}{2}}$ и $y = x^{-\frac{3}{2}}$; г) $y = x^{-\frac{1}{3}}$ и $y = x^{-\frac{4}{3}}$.

§ 6. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

6.1. Простейшие показательные уравнения

Пусть a — данное положительное, не равное 1 число, b — данное действительное число. Тогда уравнение

$$a^x = b \qquad (1)$$

называют **простейшим показательным уравнением.**

Например, уравнения $2^x = 8$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$, $5^x = \sqrt[3]{7}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 3$, $25^x = -25$ являются простейшими показательными уравнениями.

Напомним, что корнем (или решением) уравнения с неизвестным x называют число x_0, при подстановке которого в уравнение вместо x получается верное числовое равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни или показать, что их нет.

Поскольку $a^{x_0} > 0$ для любого действительного числа x_0, то при $b \leqslant 0$ не существует действительного числа x_0, для которого было бы справедливо числовое равенство $a^{x_0} = b$.

Если $b > 0$, то из определения и свойств логарифмов следует, что числовому равенству $a^{x_0} = b$ удовлетворяет единственное число $x_0 = \log_a b$.

Таким образом, уравнение (1):

1) при $b \leqslant 0$ не имеет корней;
2) при $b > 0$ имеет единственный корень $x_0 = \log_a b$.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2. \qquad (2)$$

Так как $2 > 0$, то это уравнение имеет единственный корень $x_0 = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$.

Ответ. -1.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$3^x = 5. \qquad (3)$$

Так как $5 > 0$, то это уравнение имеет единственный корень $x_0 = \log_3 5$.

Ответ. $\log_3 5$.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$25^x = -25.$$

Так как $-25 < 0$, то это уравнение не имеет корней.

Ответ. Нет корней.

Для отыскания корня уравнения (1) при $b > 0$ это уравнение часто записывают в виде $a^x = a^\alpha$, где $\alpha = \log_a b$. Тогда очевидно, что единственный корень этого уравнения, а значит и уравнения (1), есть число α.

Так как уравнение (2) можно записать в виде

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1},$$

то его единственный корень $x_0 = -1$.

Так как уравнение (3) можно записать в виде $3^x = 3^{\log_3 5}$, то его единственный корень $x_0 = \log_3 5$.

Теперь рассмотрим уравнения, которые после несложных преобразований превращаются в простейшие показательные уравнения.

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$5^{x+2} - 2 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^{x+1} = 200. \qquad (4)$$

Так как $5^{x+2} = 25 \cdot 5^x$, $5^{x+1} = 5 \cdot 5^x$, то уравнение (4) можно переписать в виде

$$5^x \cdot (25 - 2 - 15) = 200$$

или в виде

$$5^x = 5^2. \qquad (5)$$

Очевидно, что уравнение (5), а значит и уравнение (4), имеют единственный корень $x_0 = 2$.

Ответ. 2.

ПРИМЕР 5. Решим уравнение

$$4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 0. \qquad (6)$$

Так как $2^x \neq 0$ для любого числа x, то уравнение (6) можно переписать в виде $2^x \cdot \left(4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 9\right) = 0$, откуда видно, что корни уравнения (6) совпадают с корнями уравнения

$$4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 9 = 0. \qquad (7)$$

Уравнение (7) можно переписать в виде

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2. \qquad (8)$$

Так как уравнение (8) имеет единственный корень $x_0 = 2$, то и равносильное ему уравнение (6) имеет единственный корень $x_0 = 2$.

Ответ. 2.

6.1° Какое уравнение называют простейшим показательным уравнением?

6.2° Сколько корней имеет уравнение $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, если:
а) $b \leqslant 0$; б) $b > 0$?

6.3 Чему равен корень уравнения $a^x = b$, если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$?

Решите уравнение (6.4—6.8):

6.4 а) $2^x = 2^5$; б) $2^x = 2^{-3}$; в) $2^x = 2^0$;
г) $3^x = 9$; д) $5^x = \frac{1}{5}$; е) $7^x = \frac{1}{49}$;
ж) $(0,2)^x = \frac{1}{5}$; з) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{9}$; и) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$.

6.5 а) $27^x = 3$; б) $(0,04)^x = 0,2$; в) $49^x = \frac{1}{7}$;
г) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 3$; д) $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 16$; е) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -8$;
ж) $5^x = 0$; з) $\left(\frac{1}{64}\right)^x = 2$; и) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1,5$.

6.6 а) $5^x - 5^{x-1} = 100$; б) $9^{x+1} + 3^{2x+4} = 30$;
в) $3^{2x+1} - 9^x = 18$; г) $4^{x+1} - 2^{2x-2} = 60$;
д) $4^{x+1} + 4^{x+2} = 40$; е) $3^{x-1} - 3^{x-2} = 18$.

6.7 а) $3^x = 4$; б) $2^x = 7$; в) $5^x = \frac{1}{2}$.

6.8 а) $9 \cdot 5^x - 25 \cdot 3^x = 0$;
б) $27 \cdot 5^x - 125 \cdot 3^x = 0$;
в) $27 \cdot 4^x - 8 \cdot 9^x = 0$.

6.2. Простейшие логарифмические уравнения

Пусть a — данное положительное, не равное 1 число, b — данное действительное число. Тогда уравнение

$$\log_a x = b \tag{1}$$

называют **простейшим логарифмическим уравнением.**

Например, уравнения $\log_3 x = 3$, $\log_2 x = -5$, $\log_{3\sqrt{7}} x = 2$ являются простейшими логарифмическими уравнениями.

По определению логарифма если число x_0 удовлетворяет числовому равенству $\log_a x_0 = b$, то число x_0 есть a^b, причем это число $x_0 = a^b$ единственное. Таким образом, для любого действительного числа b уравнение (1) имеет единственный корень $x_0 = a^b$.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}} x = -2. \tag{2}$$

Это уравнение имеет единственый корень $x_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$.

Ответ. 9.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$\log_2 x = \sqrt{2}. \tag{3}$$

Это уравнение имеет единственный корень $x_0 = 2^{\sqrt{2}}$.

Ответ. $2^{\sqrt{2}}$.

Для решения уравнения (1) его часто записывают в виде

$$\log_a x = \log_a \alpha,$$

где $\alpha = a^b$. Тогда очевидно, что единственный корень этого уравнения, а значит и уравнения (1), есть число α.

Так как уравнение (2) можно записать в виде

$$\log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} 9,$$

то его единственный корень $x_0 = 9$.

Так как уравнение (3) можно записать в виде

$$\log_2 x = \log_2 2^{\sqrt{2}},$$

то его единственный корень $x_0 = 2^{\sqrt{2}}$.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$\log_3 x = 3. \tag{4}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\log_3 x = \log_3 27.$$

Тогда очевидно, что уравнение (4) имеет единственный корень $x_0 = 27$.

Ответ. 27.

Теперь рассмотрим уравнения, которые после несложных преобразований превращаются в простейшие логарифмические уравнения.

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$5\log_{16} x - 3\log_4 x + \log_2 x = -3. \qquad (5)$$

Так как $\log_{16} x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 16} = \dfrac{1}{4}\log_2 x$, $\log_4 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = \dfrac{1}{2}\log_2 x$, то уравнение (5) можно переписать в виде $\left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{2} + 1\right)\cdot \log_2 x = -3$ или в виде

$$\log_2 x = \log_2 \frac{1}{16}.$$

Тогда очевидно, что уравнение (5) имеет единственный корень $x_0 = \dfrac{1}{16}$.

Ответ. $\dfrac{1}{16}$.

ПРИМЕР 5. Решим уравнение

$$\log_5^2 x + 5\log_4 x \log_3 x + 7\log_2^2 x = 0. \qquad (6)$$

Приводя все логарифмы к одному основанию, перепишем уравнение в виде

$$\log_5^2 x \cdot \left(1 + \frac{5}{\log_5 4 \log_5 3} + \frac{7}{\log_5^2 2}\right) = 0. \qquad (7)$$

Так как каждое слагаемое суммы, заключенной в скобки, положительно, то сумма не равна нулю. Поэтому уравнение (7), и значит и уравнение (6), равносильны уравнению $\log_5^2 x = 0$, имеющему единственный корень $x_0 = 1$. Следовательно, уравнение (6) имеет единственный корень $x_0 = 1$.

Ответ. 1. ●

6.9 а) Какое уравнение называют простейшим логарифмическим уравнением?

б) Сколько решений имеет уравнение $\log_a x = b$, если $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in \boldsymbol{R}$?

Решите уравнение (**6.10—6.15**):

6.10 а) $\log_2 x = 5$; б) $\log_3 x = 0{,}5$; в) $\log_5 x = -1$;

г) $\log_{0,5} x = 2$; д) $\log_{0,3} x = -1$; е) $\log_{0,25} x = -0{,}5$.

6.11 а) $\log_2(\log_2 x) = 1$; б) $\log_3(\log_2 x) = 1$;
в) $\log_3(\log_4 x) = 0$; г) $\log_5(\log_2 x) = 0$.

6.12 а) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$;
б) $\log_{81} x + \log_9 x + \log_3 x = 7$;
в) $2\log_2(\log_2 x) + \log_{0,5}(\log_2 x) = 1$;
г) $2\log_{0,5}(\log_2 x) + \log_2(\log_2 x) = -1$.

6.13 а) $\log_2 x + 2\log_4 x + 3\log_8 x + 4\log_{16} x = 4$;
б) $\log_3 x + 2\log_9 x + 3\log_{27} x + 4\log_{81} x = 8$;
в) $\log_{\sqrt{2}} x + 2\log_2 x + 4\log_4 x + 6\log_8 x = 12$;
г) $\log_{\sqrt{3}} x + 2\log_3 x + 4\log_9 x + 6\log_{27} x = 16$.

6.14* а) $\log_2 x + \log_3 x = \log_3 6$;
б) $\log_3 x + \log_4 x = 2\log_4 12$;
в) $2\log_4 x - \log_5 x = 3\log_{\sqrt{5}} \frac{5}{2}$;
г) $2\log_4 x - \log_6 x = 2\log_{\sqrt{6}} 3$.

6.15 а) $\log_2^2 x + 5\log_3 x \log_4 x + \log_5^2 x = 0$;
б) $\log_3^2 x + 2\log_4 x \log_5 x + 6\log_6^2 x = 0$;
в) $\log_5^2 x - 13\log_5 x \log_4 x + 22\log_4^2 x = 0$;
г) $\log_2^2 x - 5\log_2 x \log_3 x + 6\log_3^2 x = 0$.

6.3. Уравнения, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного

Рассмотрим решение уравнений, которые после замены неизвестного превращаются в простейшие показательные или логарифмические уравнения.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$\log_5(4x - 3) = 2. \qquad (1)$$

Введя новое неизвестное $t = 4x - 3$, перепишем уравнение (1) в виде

$$\log_5 t = 2.$$

Это уравнение имеет единственный корень $t_1 = 5^2 = 25$. Чтобы найти корень уравнения (1), надо решить уравнение

$$4x - 3 = 25. \qquad (2)$$

Оно имеет единственный корень $x_1 = 7$. Следовательно, уравнение (1) тоже имеет единственный корень $x_1 = 7$.

Замечание. Обычно решение уравнений вида (1) записывают короче, не вводя нового неизвестного, а сразу пишут уравнение (2), равносильное уравнению (1) и решают уравнение (2).

Ответ. 7.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$9^{2x^2 - 4x + 2} - 2 \cdot 3^{4x^2 - 8x + 3} - 1 = 0. \qquad (3)$$

Переписав уравнение (3) в виде $3^{4x^2 - 8x + 3} = 1$, введем новое неизвестное $t = 4x^2 - 8x + 3$. Тогда уравнение (3) можно переписать в виде

$$3^t = 1. \qquad (4)$$

Так как уравнение (4) имеет единственный корень $t_1 = 0$, то для того, чтобы найти корни уравнения (3), надо решить уравнение

$$4x^2 - 8x + 3 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{3}{2}$, поэтому уравнение (3) имеет те же корни.

Ответ. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$.

Теперь рассмотрим решение уравнений, которые после введения нового неизвестного t превращаются в квадратные или рациональные уравнения с неизвестным t.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0. \qquad (5)$$

Так как $4^x = (2^x)^2$, то уравнение (5) можно переписать в виде

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0.$$

Введя новое неизвестное $t = 2^x$, получим квадратное уравнение

$$t^2 - 3t + 2 = 0,$$

которое имеет два корня $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Следовательно, чтобы найти все корни уравнения (5), надо объединить все корни двух уравнений

$$2^x = 1 \text{ и } 2^x = 2.$$

Решив эти простейшие показательные уравнения, получим, что все корни уравнения (5) есть $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Ответ. 0; 1.

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$\lg^2 x - \lg x - 12 = 0. \qquad (6)$$

Введя новое неизвестное $t = \lg x$, получим квадратное уравнение $t^2 - t - 12 = 0$, которое имеет два корня $t_1 = -3$, $t_2 = 4$.

Поэтому, чтобы найти все корни уравнения (6), надо объединить все корни уравнений $\lg x = -3$ и $\lg x = 4$. Решив эти простейшие логарифмические уравнения, получим все корни уравнения (6): $x_1 = 10^{-3} = 0{,}001$ и $x_2 = 10^4 = 10\,000$.

Ответ. 0,001; 10 000.

ПРИМЕР 5. Решим уравнение

$$6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0. \qquad (7)$$

Так как $4^x \neq 0$ для любого числа x, то уравнение (7) можно переписать в виде $4^x \cdot \left(6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 6\right) = 0$, откуда видно, что корни уравнения (7) совпадают с корнями уравнения $6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 = 0$.

Введя новое неизвестное $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, получим квадратное уравнение $6t^2 - 13t + 6 = 0$, имеющее два корня $t_1 = \frac{2}{3}$ и $t_2 = \frac{3}{2}$. Следовательно, чтобы найти все корни уравнения (7), надо объединить корни двух уравнений:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}.$$

Решив эти простейшие показательные уравнения, найдем все корни уравнения (7): $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Ответ. –1; 1.

ПРИМЕР 6. Решим уравнение

$$\frac{2}{\lg(3x+1) + \lg 0{,}01} + \frac{1}{\lg(3x+1)} = -1. \qquad (8)$$

Введя новое неизвестное $t = \lg(3x+1)$ и учитывая, что $\lg 0{,}01 = -2$, перепишем уравнение (8) в виде

$$\frac{2}{t-2} + \frac{1}{t} = -1. \qquad (9)$$

Решив рациональное уравнение (9), получим, что оно имеет два корня $t_1 = -2$ и $t_2 = 1$. Чтобы найти все корни уравнения (8), надо объединить корни двух уравнений

$$\lg(3x+1) = -2 \text{ и } \lg(3x+1) = 1.$$

Первое уравнение равносильно уравнению $3x + 1 = 10^{-2}$, имеющему единственный корень $x_1 = -0{,}33$. Второе уравнение равносильно уравнению $3x + 1 = 10$, также имеющему единственный корень $x_2 = 3$.

Следовательно, уравнение (8) имеет только два корня: $x_1 = -0{,}33$ и $x_2 = 3$.

Ответ. $-0{,}33$; 3.

Решите уравнения (6.16—6.28):

6.16 а) $7^{3x-1} = 49$; б) $5^{-x+2} = 0{,}2$;
в) $2^{-3x+1} = 16$; г) $(0{,}5)^{x-6} = 4$.

6.17 а) $5^{2x-5} = 125$; б) $3^{5x-2} = 27$; в) $7^{8x-2} = 49$;
г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x} = 4$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+x} = \frac{1}{9}$; е) $5^{x^2-2x} = 0{,}2$.

6.18 а) $\log_2(3x-7) = 1$; б) $\log_3(2x-11) = 2$;
в) $\log_{\frac{1}{4}}(3x-2) = 0$; г) $\log_{\frac{1}{2}}(5x-2) = -3$;
д) $\log_{\frac{1}{3}}(x+12) = -2$; е) $\log_2(7x-5) = -2$.

6.19 а) $3^{4x^2-6x+3} - 10 \cdot 3^{2x^2-3x+1} + 3 = 0$;
б) $2^{6x^2-8x+3} - 5 \cdot 2^{3x^2-4x+1} + 2 = 0$;
в) $2^{10x^2-8x-23} + 2^{5x^2-4x-12} - 3 = 0$;
г) $3^{8x^2-6x-13} - 3^{4x^2-3x-7} - 2 = 0$.

6.20 а) $\log_5(2x^2-3x+1{,}2) = -1$; б) $\log_3(3x^2-5x+1) = 1$;
в) $\log_{\frac{1}{4}}(2x^2-7x-6) = -2$; г) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-17x+9) = -3$.

6.21 а) $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$; б) $4^x - 3 \cdot 2^x + 3 = 0$;
в) $9^{2x} - 2 \cdot 9^x - 3 = 0$; г) $3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$;
д) $16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0$; е) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$.

6.22 а) $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$; б) $2\lg^2 x - 5\lg x - 7 = 0$;
в) $3\lg^2 x - 5\lg x + 2 = 0$; г) $5\lg^2 x + 4\lg x - 1 = 0$.

6.23 а) $5^x + 2 \cdot 5^{-x} - 3 = 0$; б) $7^x + 2 \cdot 7^{1-x} - 9 = 0$;
в) $2^x + 2^{-x} - 2 = 0$; г) $2^x - 2^{-x} - 3\frac{3}{4} = 0$.

6.24 а) $3^{x+1} - \dfrac{2}{3^{x+1} - 2} = 1$; б) $5^{x-1} + \dfrac{2}{5^{x-1} + 2} = 1$;

в) $\dfrac{3^{x+1} + 5}{3^x - 1} - \dfrac{3^{x+1} - 5}{3^x + 1} = 6$; г) $\dfrac{2^{x+1} + 3}{2^x - 1} - \dfrac{2^{x+1} - 1}{2^x + 1} = 6$.

6.25 а) $\dfrac{2}{3^x - 1} + 4 = \dfrac{5}{3^x - 2}$; б) $\dfrac{1}{5^x} = \dfrac{1}{5^x - 2} + 2$;

в) $\dfrac{5^x}{5^x - 2} = \dfrac{8}{25^x - 4}$; г) $\dfrac{7^x}{7^x - 3} = \dfrac{18}{49^x - 9}$.

6.26 а) $\dfrac{1}{\lg x + \lg 0{,}1} + \dfrac{1}{\lg x} = \dfrac{3}{2}$; б) $\dfrac{1}{\lg x + \lg 0{,}1} - \dfrac{1}{\lg x - \lg 0{,}1} = \dfrac{2}{3}$.

6.27 а) $\log_2 x + 5 \log_x 2 = 6$; б) $\log_{0,5} x + 3 \log_x 0{,}5 = 4$;
в) $5 \log_3 x - 3 \log_x 3 = 2$; г) $\log_{0,3} x + 9 \log_x 0{,}3 = 10$.

6.28 а) $\dfrac{1}{\lg(3x - 2)} + \dfrac{2}{\lg(3x - 2) + \lg 0{,}01} = -1$;

б) $\dfrac{1}{\lg(9x - 8)} + \dfrac{4}{\lg(9x - 8) + \lg 0{,}001} = -1$;

в) $\dfrac{4}{\lg(3x - 5) + 2} + \dfrac{6}{\lg(3x - 5) - 3} = -5$;

г) $\dfrac{6}{\lg(x + 7) + 2} - \dfrac{6}{\lg(x + 7) - 3} = 5$.

6.4. Простейшие показательные неравенства

Пусть a — данное положительное, не равное 1 число, b — данное действительное число. Тогда неравенства

$$a^x > b \tag{1}$$

и

$$a^x < b \tag{2}$$

называют **простейшими показательными неравенствами.**

Например, неравенства

$$2^x < 3, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x > \sqrt[4]{3}, \quad 25^x < -25$$

являются простейшими показательными неравенствами.

Напомним, что решением неравенства с неизвестным x называют число x_0, при подстановке которого в неравенство вместо x получается верное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти все его решения или показать, что их нет.

Поскольку $a^{x_0} > 0$ для любого действительного числа x_0, то при $b \leqslant 0$ неравенство $a^{x_0} > b$ справедливо для любого действительного числа x_0, но нет ни одного действительного числа x_0, для которого было бы справедливо числовое неравенство $a^{x_0} < b$ или числовое равенство $a^{x_0} = b$.

Таким образом, если $b \leqslant 0$, то множество всех решений неравенства (1) есть интервал $(-\infty; +\infty)$, а неравенство (2) решений не имеет.

Если же $b > 0$, то неравенства (1) и (2) можно переписать в виде

$$a^x > a^{x_0} \tag{3}$$

и

$$a^x < a^{x_0}, \tag{4}$$

где $x_0 = \log_a b$.

Рассмотрим решение неравенств (3) и (4) сначала при $a > 1$. Так как для такого a функция $y = a^x$ является возрастающей, то для любого числа $x > x_0$ справедливо числовое неравенство $a^x > a^{x_0}$, а для любого числа $x < x_0$ справедливо числовое неравенство $a^x < a^{x_0}$. Кроме того, равенство $a^x = a^{x_0}$ справедливо лишь при $x = x_0$.

Таким образом, при $b > 0$ и $a > 1$ множество всех решений неравенства (3) есть интервал $(x_0; +\infty)$, а множество всех решений неравенства (4) есть интервал $(-\infty; x_0)$, где $x_0 = \log_a b$.

Пусть теперь $0 < a < 1$. Так как для такого a функция $y = a^x$ является убывающей, то для любого числа $x > x_0$ справедливо числовое неравенство $a^x < a^{x_0}$, а для любого числа $x < x_0$ справедливо числовое неравенство $a^x > a^{x_0}$. Кроме того, равенство $a^x = a^{x_0}$ справедливо лишь при $x = x_0$.

Таким образом, при $b > 0$ и $0 < a < 1$ множество всех решений неравенства (3) есть интервал $(-\infty; x_0)$, а множество всех решений неравенства (4) есть интервал $(x_0; +\infty)$, где $x_0 = \log_a b$.

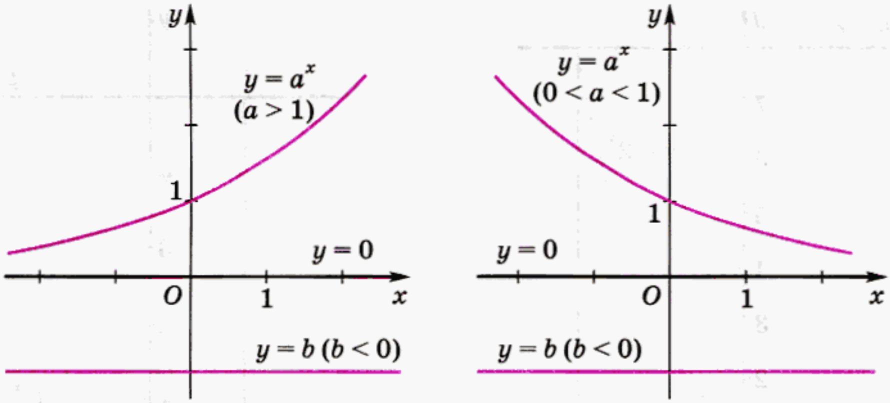
Приведенное выше решение простейших показательных неравенств можно дополнить графической иллюстрацией.

Рассмотрим графики функций $y = a^x$ и $y = b$.

Ясно, что при $b \leqslant 0$ прямая $y = b$ не пересекает график функции $y = a^x$, так как расположена под кривой $y = a^x$ (рис. 58, *а*, *б*). Поэтому для любых x выполняется неравенство (1) и нет таких x, для которых выполнялось бы неравенство (2).

При $b > 0$ прямая $y = b$ пересекает график функции $y = a^x$ в единственной точке $x_0 = \log_a b$.

Если $a > 1$, то для каждого $x > x_0$ соответствующая точка графика функции $y = a^x$ находится выше прямой $y = b$, а для каждого $x < x_0$ — ниже прямой $y = b$ (рис. 59).



а) б)

Рис. 58

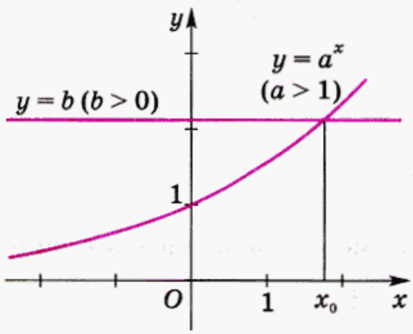


Рис. 59

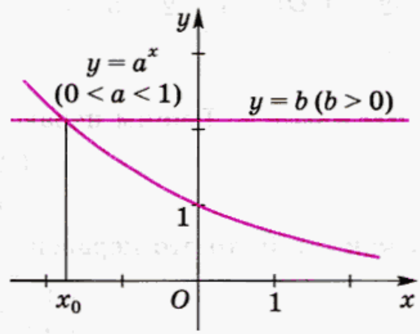


Рис. 60

Если же $0 < a < 1$, то для каждого $x > x_0$ соответствующая точка графика функции $y = a^x$ находится ниже прямой $y = b$, а для каждого $x < x_0$— выше прямой $y = b$ (рис. 60).

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$2^x < 8. \tag{5}$$

Так как $8 > 0$, то неравенство (5) можно переписать в виде

$$2^x < 2^3. \tag{6}$$

Так как $2 > 1$, то функция $y = 2^x$ возрастающая. Поэтому решениями неравенства (6), а значит и неравенства (5), являются все $x < 3$ (рис. 61).

Ответ. $(-\infty; 3)$.

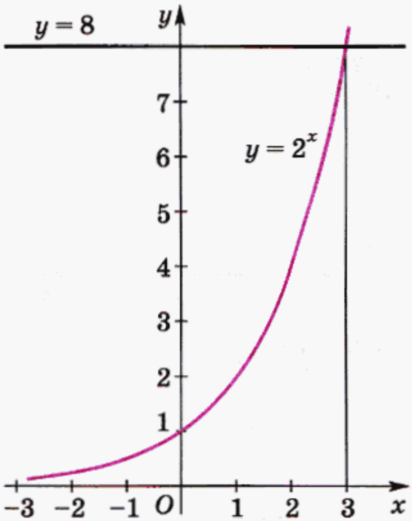


Рис. 61

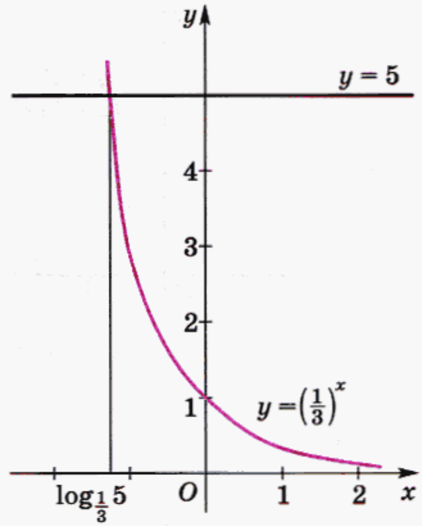


Рис. 62

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x < 5. \qquad (7)$$

Так как $5 > 0$, то это неравенство (7) можно переписать в виде

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 5}. \qquad (8)$$

Так как $0 < \frac{1}{3} < 1$, то функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ убывающая. Поэтому решениями неравенства (8), а значит и неравенства (7), являются все $x > \log_{\frac{1}{3}} 5$ (рис. 62).

Ответ. $(\log_{\frac{1}{3}} 5; +\infty)$.

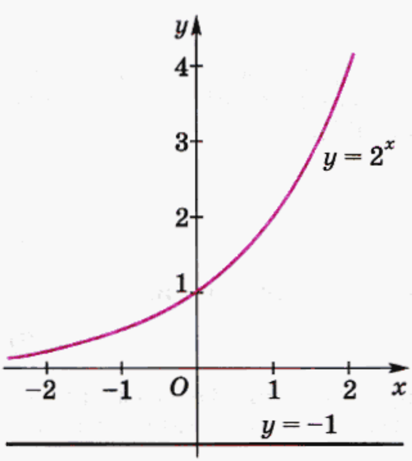


Рис. 63

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$2^x < -1. \qquad (9)$$

Так как $-1 < 0$, то неравенство (9) не имеет решений (рис. 63).

Ответ. Нет решений.

ПРИМЕР 4. Решим неравенство

$$2^{x-2} + 2^{x+1} < 18. \qquad (10)$$

Перепишем неравенство (10) в виде $\left(\frac{1}{4} + 2\right) \cdot 2^x < 18$ или в виде

$$2^x < 2^3. \qquad (11)$$

Решениями неравенства (11), а значит и неравенства (10), являются все $x < 3$ (см. пример 1).

Ответ. $(-\infty; 3)$.

ПРИМЕР 5. Решим неравенство

$$49 \cdot 5^x - 25 \cdot 7^x > 0. \qquad (12)$$

Так как $7^x \neq 0$ для любого числа x, то неравенство (12) можно переписать в виде $49 \cdot 7^x \cdot \left(\left(\frac{5}{7}\right)^x - \left(\frac{5}{7}\right)^2\right) > 0$. Так как $49 \cdot 7^x > 0$ для любого числа x, то множество решений неравенства (12) совпадает с множеством решений неравенства

$$\left(\frac{5}{7}\right)^x > \left(\frac{5}{7}\right)^2. \qquad (13)$$

Так как $0 < \frac{5}{7} < 1$, то функция $y = \left(\frac{5}{7}\right)^x$ убывающая, поэтому решениями неравенства (13), а значит и неравенства (12), являются все $x < 2$.

Ответ. $(-\infty; 2)$.

6.29° Какое неравенство называют простейшим показательным неравенством?

6.30 Является ли число 1 решением неравенства:

а) $2^x < 3$; б) $2^x > 1$; в) $2^x \leqslant 1$;
г) $(0{,}5)^x < 3$; д) $(0{,}1)^x > 1$; е) $(0{,}2)^x \leqslant 0{,}2$?

Решите неравенство (**6.31—6.35**):

6.31 а) $2^x > 4$; б) $5^x < 125$; в) $3^x > -1$;
г) $(0{,}5)^x < -1$; д) $(0{,}2)^x > 1$; е) $8^x > 64$.

6.32 а) $4^x \geqslant 2$; б) $9^x \leqslant \frac{1}{3}$; в) $16^x \geqslant \frac{1}{2}$;
г) $25^x \leqslant 5$; д) $4^x \leqslant \frac{1}{2}$; е) $8^x \geqslant 4$.

6.33 а) $81 \cdot 3^x > 1$; б) $27 \cdot 3^x < 1$; в) $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x > -7$;
г) $2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x < -5$; д) $250 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x < 2$; е) $12 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x > 3$.

6.34 а) $2^{x+2} + 2^x > 20$;
б) $3^{x+2} - 3^x < 24$;
в) $4^{x+1} + 4^x > 1{,}25$;
г) $3^{2x+1} - 9^x < \frac{2}{3}$;
д) $4^x - 4^{x-1} < 3$;
е) $5^x - 5^{x-2} < 24$.

6.35 а) $9 \cdot 7^x - 49 \cdot 3^x > 0$;
б) $8 \cdot 5^x - 125 \cdot 3^x < 0$;
в) $64 \cdot 5^x - 125 \cdot 4^x > 0$;
г) $81 \cdot 2^x - 16 \cdot 3^x < 0$;
д) $49 \cdot 4^x - 16 \cdot 7^x > 0$;
е) $625 \cdot 3^x - 81 \cdot 5^x < 0$.

6.5. Простейшие логарифмические неравенства

Пусть a — данное положительное, не равное 1 число, b — данное действительное число. Тогда неравенства

$$\log_a x > b \tag{1}$$

и

$$\log_a x < b \tag{2}$$

называют **простейшими логарифмическими неравенствами.**

Например, неравенства

$$\log_2 x < 3,\ \log_{\frac{1}{3}} x > -5,\ \log_{0,5} x > -2{,}5$$

являются простейшими логарифмическими неравенствами.

Неравенства (1) и (2) можно переписать в виде

$$\log_a x > \log_a x_0 \tag{3}$$

и

$$\log_a x < \log_a x_0, \tag{4}$$

где $x_0 = a^b$.

Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ возрастает на всей своей области определения, т. е. на интервале $(0; +\infty)$. Поэтому для любого числа $x > x_0$ справедливо числовое неравенство $\log_a x > \log_a x_0$, а для любого числа x из промежутка $0 < x < x_0$ справедливо числовое неравенство $\log_a x < \log_a x_0$. Кроме того, равенство $\log_a x = \log_a x_0$ справедливо лишь при $x = x_0$.

Таким образом, при $a > 1$ и любом действительном числе b множество всех решений неравенства (3) есть интервал $(x_0; +\infty)$, а множество всех решений неравенства (4) есть интервал $(0; x_0)$.

Если же $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ убывает. Поэтому для любого числа $x > x_0$ справедливо числовое неравенство $\log_a x < \log_a x_0$, а для любого числа x из промежутка $0 < x < x_0$ справедливо числовое неравенство $\log_a x > \log_a x_0$. Кроме того, равенство $\log_a x = \log_a x_0$ справедливо лишь при $x = x_0$.

Таким образом, при $0 < a < 1$ и любом действительном числе b множество всех решений неравенства (3) есть интервал $(0; x_0)$, а множество всех решений неравенства (4) есть интервал $(x_0; +\infty)$.

Замечание. Подчеркнем, что при $a > 1$ решениями неравенства (4), а при $0 < a < 1$ решениями неравенства (3) являются все x, меньшие, чем x_0, но из области определения функции $y = \log_a x$, т. е. все x из промежутка $(0; x_0)$.

Приведенное выше решение простейших логарифмических неравенств дополним графической иллюстрацией.

На координатной плоскости xOy рассмотрим графики функций $y = \log_a x$ и $y = b$. Прямая $y = b$ пересекает график функции $y = \log_a x$ в единственной точке $x_0 = a^b$.

Если $a > 1$, то для каждого $x > x_0$ соответствующая точка графика функции $y = \log_a x$ находится выше прямой $y = b$, т. е. для каждого $x > x_0$ соответствующая ордината $y = a^x$ больше, чем ордината a^{x_0}, а для каждого x из интервала $0 < x < x_0$ соответствующая точка графика функции $y = \log_a x$ находится ниже прямой $y = b$ (рис. 64).

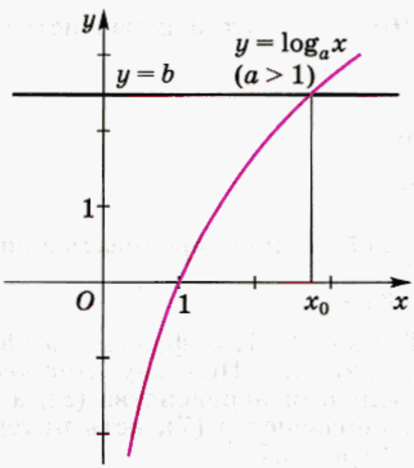


Рис. 64

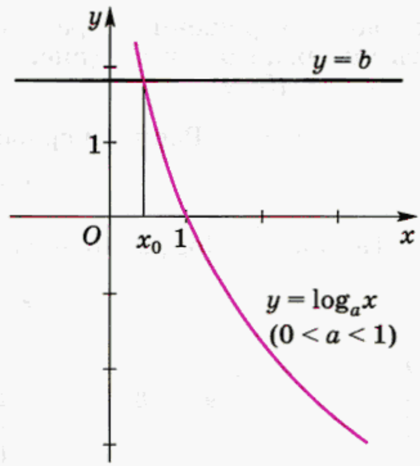


Рис. 65

Если же $0 < a < 1$, то, наоборот, для каждого $x > x_0$ соответствующая точка графика функции $y = \log_a x$ находится ниже прямой $y = b$, а для каждого x из интервала $0 < x < x_0$ соответствующая точка графика функции $y = \log_a x$ находится выше прямой $y = b$ (рис. 65).

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} x > -2. \tag{5}$$

Так как $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$, то неравенство (5) можно переписать в виде

$$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} 9. \tag{6}$$

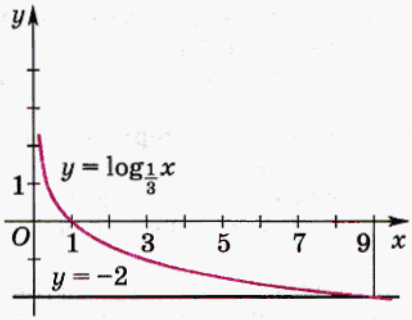


Рис. 66

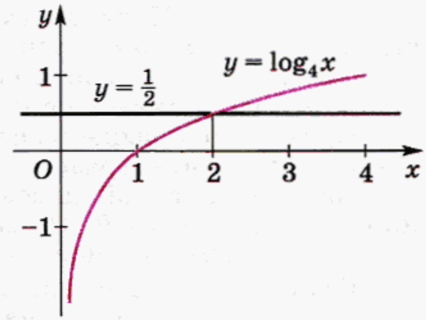


Рис. 67

Так как $\frac{1}{3} < 1$, то функция $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ убывающая. Поэтому множество всех решений неравенства (6), а значит и неравенства (5), есть интервал $0 < x < 9$ (рис. 66).

Ответ. (0; 9).

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$\log_4 x > \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Так как $\frac{1}{2} = \log_4 2$, то неравенство (7) можно переписать в виде

$$\log_4 x > \log_4 2. \tag{8}$$

Так как $4 > 1$, то функция $y = \log_4 x$ возрастающая. Поэтому множество всех решений неравенства (8), а значит и неравенства (7), есть интервал $(2; +\infty)$ (рис. 67).

Ответ. $(2; +\infty)$.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$\log_3 x - 3\log_9 x - \log_{81} x > 1{,}5. \tag{9}$$

Так как

$$\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{2} = \frac{1}{2}\log_3 x,$$

$$\log_{81} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 81} = \frac{\log_3 x}{4} = \frac{1}{4}\log_3 x,$$

то неравенство (9) можно переписать в виде

$$\left(1 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)\log_3 x > 1{,}5$$

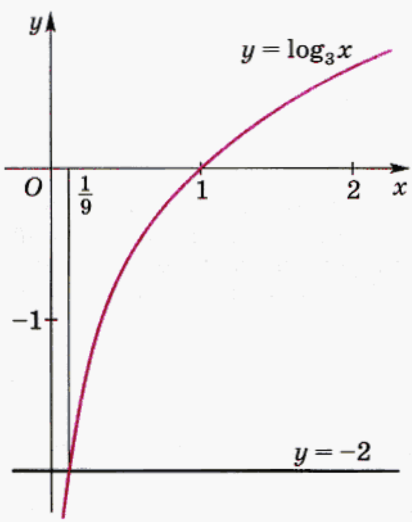


Рис. 68

или в виде

$$\log_3 x < \log_3 \frac{1}{9}. \qquad (10)$$

Так как $3 > 1$, то функция $y = \log_3 x$ возрастающая. Поэтому множество всех решений неравенства (10), а значит и неравенства (9), есть интервал $0 < x < \frac{1}{9}$ (рис. 68).

Ответ. $\left(0;\ \frac{1}{9}\right)$.

6.36° Какие неравенства называют простейшими логарифмическими неравенствами?

6.37 Какие решения имеет неравенство $\log_a x > \log_a b$ $(b > 0)$, если:
а) $a > 1$; б) $0 < a < 1$?

6.38 Какие решения имеет неравенство $\log_a x < \log_a b$ $(b > 0)$, если:
а) $a > 1$; б) $0 < a < 1$?

Решите неравенство **(6.39—6.44)**:

6.39 а) $\log_2 x > 1$; б) $\log_3 x > -1$; в) $\lg x < 2$;
г) $\log_9 x < 0$; д) $\log_2 x > 0$; е) $\lg x < -2$.

6.40 а) $\log_{0,2} x > 1$; б) $\log_{0,3} x > -1$; в) $\log_{0,1} x < 2$;
г) $\log_{0,6} x \geqslant -1$; д) $\log_{0,7} x \geqslant 0$; е) $\log_{0,5} x \leqslant 0$.

6.41. а) $5 \log_2 x > 20$; б) $-4 \log_5 x < -12$; в) $3 \log_7 x \geqslant 6$;
г) $3 \log_{0,2} x > -6$; д) $-6 \log_{0,5} x < -6$; е) $-3 \log_{0,25} x \leqslant 6$.

6.42 а) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x > 3{,}5$;
б) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x < \frac{11}{3}$.

6.43 а) $\log_2 x + 2 \log_4 x + 3 \log_8 x \geqslant 6$;
б) $\log_3 x + 2 \log_9 x + 3 \log_{27} x \leqslant 3$;
в) $3 \log_{\sqrt{2}} x - 4 \log_2 x + 4 \log_4 x \geqslant 8$;
г) $5 \log_{\sqrt{3}} x - 4 \log_{\sqrt{3}} x + 4 \log_9 x \leqslant 8$.

6.44 а) $\log_2 x + \log_3 x < \log_3 6$;
б) $\log_3 x + \log_4 x > \log_4 12$;
в) $2 \log_5 x - \log_2 x > \log_2 0{,}8$;
г) $\log_2 x - 2 \log_3 x < 4 \log_3 0{,}75$.

6.6. Неравенства, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного

Рассмотрим неравенства, которые после замены неизвестного превращаются в простейшие показательные или логарифмические неравенства.

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$5^{3x^2 - 2x - 6} < \frac{1}{5}. \qquad (1)$$

Введя новое неизвестное $t = 3x^2 - 2x - 6$, перепишем неравенство (1) в виде

$$5^t < 5^{-1}.$$

Так как $5 > 1$, то все решения этого неравенства есть все $t < -1$. Следовательно, множество решений неравенства (1) состоит их всех решений неравенства

$$3x^2 - 2x - 6 < -1. \qquad (2)$$

Решив квадратное неравенство (2), найдем все его решения: $-1 < x < \frac{5}{3}$. Они и являются решениями неравенства (1).

Замечание. Обычно при решении уравнений вида (1) не вводят новое неизвестное, а пишут неравенство (2), равносильное неравенству (1) и далее решают неравенство (2).

Ответ. $\left(-1;\ \frac{5}{3}\right)$.

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$\log_{0,5}(x^2 - 3x + 2) > -1. \qquad (3)$$

Введя новое неизвестное $t = x^2 - 3x + 2$ и заменив число -1 на $\log_{0,5} 2$, перепишем неравенство (3) в виде

$$\log_{0,5} t > \log_{0,5} 2.$$

Так как $0,5 < 1$, то все решения этого неравенства $0 < t < 2$. Следовательно, все решения неравенства (3) есть решения неравенства

$$0 < x^2 - 3x + 2 < 2.$$

Решив это двойное неравенство, найдем все его решения: $0 < x < 1$ и $2 < x < 3$. Они и являются решениями неравенства (3).

Ответ. $(0;\ 1) \cup (2;\ 3)$.

Теперь рассмотрим неравенства, которые после введения нового неизвестного превращаются в квадратные или рациональные неравенства.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0. \tag{4}$$

Перепишем неравенство (4) в виде

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 > 0.$$

Введем новое неизвестное $t = 2^x$, тогда неравенство (4) превращается в квадратное неравенство с неизвестным t:

$$t^2 - 3t + 2 > 0. \tag{5}$$

Неравенству (5) удовлетворяют все $t < 1$ и все $t > 2$. Следовательно, чтобы найти все решения неравенства (4), надо объединить все решения двух неравенств: $2^x < 1$ и $2^x > 2$.

Все решения первого неравенства составляют интервал $(-\infty; 0)$, а все решения второго неравенства составляют интервал $(1; +\infty)$. Следовательно, множество всех решений неравенства (4) есть объединение двух интервалов $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

ПРИМЕР 4. Решим неравенство

$$\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 < 0. \tag{6}$$

Введем новое неизвестное $t = \log_2 x$, тогда неравенство (6) превращается в квадратное неравенство с неизвестным t:

$$t^2 - 2t - 3 < 0,$$

множество всех решений которого есть интервал $-1 < t < 3$. Поэтому, чтобы найти все решения неравенства (6), надо решить двойное неравенство

$$-1 < \log_2 x < 3$$

или двойное неравенство

$$\log_2 \frac{1}{2} < \log_2 x < \log_2 8.$$

Так как $2 > 1$, то функция $y = \log_2 x$ возрастающая. Поэтому множество всех решений неравенства (6) есть интервал $\frac{1}{2} < x < 8$ (рис. 69).

Ответ. $\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$.

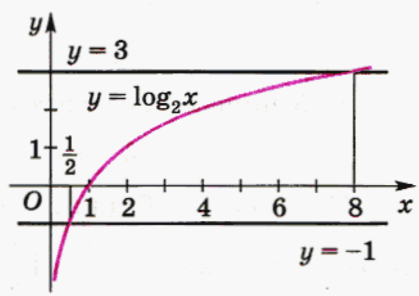


Рис. 69

ПРИМЕР 5. Решим неравенство

$$2^x - \frac{9}{2^x - 1} < 1. \tag{7}$$

Введем новое неизвестное $t = 2^x$, тогда неравенство (7) превращается в рациональное неравенство с неизвестным t:

$$t - \frac{9}{t-1} - 1 < 0. \tag{8}$$

Неравенству (8) удовлетворяют все $t < -2$ и все t из промежутка $1 < t < 4$. Следовательно, чтобы найти все решения неравенства (7), надо объединить все решения неравенств $2^x < -2$ и $1 < 2^x < 4$.

Первое из этих неравенств не имеет решений, а множество всех решений второго неравенства есть интервал (0; 2). Значит, множество всех решений неравенства (7) есть интервал (0; 2).

Ответ. (0; 2).

ПРИМЕР 6. Решим неравенство

$$49 \cdot 5^{3x-4} - 25 \cdot 7^{3x-4} > 0. \tag{9}$$

Так как $7^{3x-4} > 0$ для любых действительных x, то, разделив неравенство (9) на 7^{3x-4}, получим неравенство $49 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{3x-4} - 25 > 0$, равносильное неравенству (9). Перепишем это неравенство в виде

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{3x-4} > \left(\frac{5}{7}\right)^2. \tag{10}$$

Так как $\frac{5}{7} < 1$, то неравенство (10) равносильно неравенству

$$3x - 4 < 2,$$

все решения которого есть все $x < 2$. Следовательно, все эти x и являются решениями неравенства (9).

Ответ. $(-\infty; 2)$.

ПРИМЕР 7. Решим неравенство

$$25^{x+0,5} - 7 \cdot 10^x + 4^{x+0,5} > 0. \tag{11}$$

Перепишем неравенство (11) в виде

$$5 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 5^x \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{2x} > 0. \tag{12}$$

Так как $4^x \neq 0$ для любого числа x, то неравенство (12) можно переписать в виде $4^x \cdot \left(5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 7 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 2\right) > 0$. Так как $4^x > 0$ для любого числа x, то множество решений неравенства (12) совпадает с множеством решений неравенства

$$5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 7 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 2 > 0. \tag{13}$$

Введя новое неизвестное $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$, перепишем неравенство (13) в виде

$$5t^2 - 7t + 2 > 0. \tag{14}$$

Неравенству (14) удовлетворяют все $t < \frac{2}{5}$ и все $t > 1$. Следовательно, чтобы найти все решения неравенства (11), надо объединить все решения двух неравенств $\left(\frac{5}{2}\right)^x < \frac{2}{5}$ и $\left(\frac{5}{2}\right)^x > 1$.

Решив эти простейшие показательные неравенства, найдем, что все решения неравенства (11) есть все $x < -1$ и все $x > 0$.

Ответ. $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Решите неравенство (**6.45—6.62**):

6.45 а) $5^{3x+5} > 25$; б) $6^{6x-4} < 36$;

в) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-3} > \frac{8}{125}$; г) $\left(\frac{3}{5}\right)^{3x-7} < \frac{9}{25}$.

6.46 а) $(0,25)^x \leqslant \frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{5^x} \geqslant 0,04$;

в) $9 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{2+3x} \geqslant \frac{1}{81}$; г) $4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{2+5x} \leqslant \frac{1}{16}$.

6.47* а) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^{3-2x} < 9$; б) $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{4x-3} > 32$;

в) $3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2-3x} < \frac{1}{9}$; г) $\frac{0,5}{(\sqrt{2})^{3x-4}} > 4$.

6.48 а) $125 \cdot 3^{2x-7} - 27 \cdot 5^{2x-7} > 0$; б) $81 \cdot 5^{7x-5} - 25 \cdot 9^{7x-5} < 0$;

в) $72 \cdot 5^{4x+2} - 50 \cdot 6^{4x+2} < 0$; г) $162 \cdot 2^{3x+1} - 32 \cdot 3^{3x+1} > 0$;

д) $4 \cdot 9^{6x-4} - 9 \cdot 6^{6x-4} > 0$; е) $27 \cdot 4^{2x-1} - 8 \cdot 6^{2x-1} < 0$.

6.49 а) $7^{4x^2-9x+6} > 7$; б) $3^{3x^2-7x+6} < 9$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x^2-4x-3} > 9$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3x-6} < 2$.

6.50 а) $3^{x+4} + 3^{-x-3} > 4$; б) $4^{x-1} + 2^{6-2x} < 10$;

в) $8^x + 2^{4-3x} \geqslant 17$; г) $9^{x-1} + 3^{5-2x} \leqslant 28$;

д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-x-3} \leqslant 4$; е) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-4} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-x+2} \geqslant 10$.

6.51 а) $\log_2(3x-5)>3$; б) $\log_5(2x-1)<-1$;
в) $\log_7(5x-4)\geqslant 0$; г) $\log_{0,2}(3x-4)>-1$;
д) $\log_{0,5}(x-4)<1$; е) $\log_{0,25}(x-3)\leqslant -1$.

6.52 а) $\log_4(x^2-3x)<1$; б) $\log_6(x^2+35x)>2$;
в) $\log_{0,5}(x^2+7x)\geqslant -3$; г) $\log_{0,25}(x^2+3x)\leqslant -1$;
д) $\log_5(x^2-2x-3)<1$; е) $\log_{\frac{1}{7}}(x^2-4x-5)\geqslant -1$.

6.53* а) $\log_3^2 x+2\log_{\frac{1}{3}} x\log_{11} x>0$; б) $\log_3^2 x-4\log_{11} x\log_{12} x>0$;
в) $\log_2^2 x-6\log_5 x\log_9 x>0$;
г) $\log_3^2 x+4\log_4 x\log_5 x+2\log_6^2 x>0$.

6.54* а) $\log_2(x^2-5x+4)<2$; б) $\log_3(x^2-4x+3)<1$;
в) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-10x+9)>-2$; г) $\log_{\frac{1}{4}}(2x^2-6x+4)>-1$.

6.55 а) $\log_2(\log_3 x)>1$; б) $\log_2(\log_4 x)>-1$;
в) $\log_2(\log_3 x)<2$; г) $\log_3(\log_2 x)<1$.

6.56 а) $4^x-3\cdot 2^{x+1}+8\leqslant 0$; б) $\left(\frac{1}{9}\right)^x-4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+27<0$;
в) $25^x-4\cdot 5^x-5\leqslant 0$; г) $16^x+4^x-6>0$;
д) $(0,25)^x-5\cdot(0,5)^x\geqslant -4$; е) $3^{2x+3}-3^{x+1}-2<0$.

6.57 а) $\frac{1}{2^x-1}+2^x>3$; б) $\frac{-2}{2^x-2}+2^x<3$;
в) $\frac{4}{9^x-1}+9^x>5$; г) $\frac{12}{9^x-3}+7>9^x$.

6.58 а) $\frac{4}{3^x-1}-\frac{3}{3^x-3}\geqslant 0$; б) $\frac{3}{2^x-1}-\frac{2}{2^x-2}\leqslant 0$;
в) $\frac{3}{5^x+1}-\frac{2}{5^x-1}\geqslant 0$; г) $\frac{1}{2^x}+\frac{1}{2^x-4}\leqslant 0$.

6.59* а) $\frac{1}{\lg(3x+1)}+\frac{2}{\lg(3x+1)+\lg 0{,}01}>-1$;
б) $\frac{1}{\lg(9x+10)}+\frac{4}{\lg(9x+10)+\lg 0{,}001}<-1$;
в) $\frac{4}{\lg(3x-2)+2}+\frac{6}{\lg(3x-2)-3}\geqslant -5$;
г) $\frac{6}{\lg(9x+1)+2}-\frac{6}{\lg(9x+1)-3}\leqslant 5$.

6.60 а) $\lg^2 x - \lg x - 2 > 0$; б) $\lg^2 x + \lg x - 2 < 0$;
в) $\lg^2 x - \lg x - 6 \geqslant 0$; г) $\lg^2 x + \lg x - 6 \leqslant 0$.

6.61 а) $\dfrac{2}{\lg x - \lg 0{,}1} - \dfrac{1}{\lg x} > 0$; б) $\dfrac{3}{\lg x + \lg 0{,}01} - \dfrac{1}{\lg x} \leqslant 0$;
в) $\lg x + \dfrac{3}{\lg x + \lg 0{,}01} \geqslant -2$; г) $\lg x + \dfrac{12}{\lg x - \lg 0{,}01} \leqslant 5$.

6.62 а) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x > 0$;
б) $3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x < 0$;
в) $15 \cdot 9^x + 16 \cdot 15^x - 15 \cdot 25^x \geqslant 0$;
г) $6 \cdot 4^x + 5 \cdot 6^x - 6 \cdot 9^x \leqslant 0$.

Исторические сведения

Древние греки за несколько столетий до нашей эры обнаружили, что наряду с рациональными отрезками, т. е. отрезками, имеющими длины, выражаемые рациональными числами, имеются также нерациональные отрезки, длины которых выражаются рациональными числами только приближенно. Для точного выражения требуется введение новых чисел. Греки, например, умели доказывать, что **диагональ квадрата со стороной длины 1 не выражается рациональным числом.** Таким образом, при решении математических задач стали появляться иррациональные (нерациональные) числа. Такими, например, являются числа, квадраты которых равны 2, 3, 17. Примеры таких чисел знал, а может быть, и впервые их открыл Пифагор — знаменитый греческий математик VI в. до н. э.

Другой знаменитый математик древности — Архимед в III в. до н. э. установил, что отношение длины любой окружности к ее диаметру, обозначаемое теперь буквой π, заключено между дробями $3\frac{10}{71}$ и $3\frac{1}{7}$, точно определив три цифры после запятой числа π. Обозначения иррациональных чисел π и e впервые ввел математик, член Российской академии наук Леонард Эйлер в 1736 г.


Л. Эйлер

Греки называли иррациональную величину, например корень из числа, не являющегося квадратом натурального, «алогос», т. е. невыразимое словами. Арабы перевели этот термин, означающий также слово «немой», как «асамм», а европейские переводчики с арабского перевели это слово на латынь как surdus — глухой. Но уже в XVI в. отдельные математики считали понятие иррационального числа равноправным с понятием рационального числа. В XVI в.

фламандский ученый Симон Стевин (1548—1620) писал: «Мы приходим к выводу, что не существует никаких абсурдных, иррациональных, неправильных, необъяснимых или глухих чисел, но среди чисел существует такое совершенство и согласие, что нам надо размышлять дни и ночи над их удивительной закономерностью».

В математике долго стояла проблема об общем определении чисел, которые выражали бы длины произвольных отрезков. Эта проблема до конца была решена только в XIX столетии. Выяснилось, что, например, в качестве таких чисел можно взять десятичные дроби. Длина произвольного отрезка выражается положительной десятичной дробью, вообще говоря, бесконечной. Верно и обратное утверждение: любая положительная десятичная дробь (в том числе бесконечная) есть длина некоторого отрезка. Длина отрезка тесно связана с понятием координатной оси.

Работая с числами, математики часто оперируют таким понятием, как **бесконечное множество.** Последовательность натуральных чисел представляет простейший и самый естественный пример бесконечного множества (в математическом смысле), играющего важную роль в современной математике.

Последовательный, шаг за шагом, переход от n к $n + 1$, порождающий бесконечную последовательность натуральных чисел, вместе с тем лежит в основе одного из важнейших и типичных для математики рассуждений — метода математической индукции.

«Эмпирическая» индукция, применяемая в естественных науках, исходит из частного ряда наблюдений некоторого явления и приходит к констатации общего закона, которому подчиняется явление в его различных формах. Степень уверенности, с которой закон таким образом устанавливается, зависит от числа отдельных наблюдений и выводимых из них заключений. Часто подобного рода индуктивные рассуждения бывают вполне убедительными.

Что касается математической индукции, то она резко отличается от эмпирической индукции. Подтверждение общего закона на конечном числе случаев никоим образом не представляет собой доказательства в математическом смысле. В этом случае можно говорить только о вполне разумной гипотезе, что рассматриваемая закономерность верна. В математике закон может считаться доказанным лишь тогда, когда он выведен как неизбежное логическое следствие из предпосылок, признаваемых справедливыми.

Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов, называется **комбинаторикой.**

Комбинаторика особенно бурно развивается в последние десятилетия. Методы комбинаторики используются для решения транспортных задач, например задач по составлению расписаний; для составления планов производства и реализации продукции. Установлены связи между комбинаторикой и задачами линейного программирования, статистики и т. д. Комбинаторика используется

Р. Декарт

И. Ньютон

для составления и декодирования шифров и для решения других проблем теории информации. Значительную роль комбинаторные методы играют и в математических вопросах — теории групп и их представлений, изучении оснований геометрии, неассоциативных алгебр и т. д.

Как в геометрии неудобно всегда сводить решение задачи к аксиомам, а удобнее пользоваться теоремами, так и в комбинаторике некоторые общие правила решения задач определенных типов удобнее представлять в виде готовых формул, которым присвоены специальные названия — перестановки, размещения и сочетания (P_n, A_n^k, C_n^k).

Алгебра — часть математики, посвященная изучению буквенных выражений и уравнений. Долгое время алгебра была частью науки о числе — арифметики. Среди различных задач, которые ставит жизнь, многие решаются одинаковыми способами. Используя вместо чисел буквы, математики научились решать такие задачи в общем виде. На этом пути и образовалась математическая наука — алгебра.

Исторически зачатки алгебры были известны вавилонянам, египтянам и грекам задолго до нашей эры. Сохранился египетский папирус Ахмеса (XVII в. до н. э.) с решением алгебраических задач. Диофант, греческий математик, живший в III в. в Александрии, написал трактат «Арифметика», в котором он свободно обращался с линейными и другими уравнениями.

В Средние века особенно активно алгебра развивалась в арабских странах и Средней Азии. Само слово «алгебра» арабское (аль-джебр) — впервые оно появилось в заглавии одного сочинения Мухаммеда аль-Хорезми, узбекского математика и астронома.

На протяжении многих веков развитие арифметики и алгебры сильно тормозилось, потому что математикам долго не удавалось ввести в свои исследования удачные обозначения. Поэтому изложение математических работ выглядело громоздко.

Только начиная с XVI столетия постепенно в математику начали вводить современные обозначения. Символы a^2, a^3, a^4 и т. д. впервые встречаются у французского ученого Рене Декарта (1596—1650). Символ a^n для произвольного числа n предложен английским ученым Исааком Ньютоном (1643—1727).

Н. И. Лобачевский

П. Дирихле

Ф. Виет

Алгебра оперирует с буквенными выражениями. Буква в алгебре часто обозначает произвольное число, принадлежащее некоторому множеству чисел. Отсюда небольшой шаг к тому, чтобы под буквой в алгебре понимать переменную величину, пробегающую некоторое множество чисел. Величины, связанные между собой, например при помощи алгебраического равенства, определяют функцию.

Определение функции, данное в наших учебниках, принадлежит русскому математику Николаю Ивановичу Лобачевскому (1792—1856) и немецкому математику Петеру Дирихле (1805—1859).

Система координат дает возможность изобразить функцию графически — в виде линии. Но и, обратно, может оказаться, что линия, изображенная в системе координат, есть график некоторой функции. Однако тогда ее изучение может быть сведено к изучению соответствующей функции.

Таким путем мы изучали прямую, параболу и некоторые другие линии.

Французский математик и философ Р. Декарт впервые применил метод координат к изучению геометрических вопросов. Это привело к созданию новой науки — аналитической геометрии. Например, графические методы решения линейных уравнений относятся к аналитической геометрии.

Еще ученые Вавилона (более 4000 лет назад) умели находить приближенное значение квадратного корня из любого натурального числа, а также решать квадратные уравнения. Это было связано с решением задач о нахождении площадей земельных участков и развитием астрономии. Однако у вавилонян еще не было понятия отрицательного числа, и поэтому корни квадратного уравнения могли быть только положительными. В «Арифметике» Диофанта нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится ряд задач, решаемых при помощи составления уравнений.

Задачи на квадратные уравнения встречаются и в трудах индийских математиков уже с V в. н. э. Квадратные уравнения классифицируются в трактате «Алгебра» аль-Хорезми. В нем приводятся и способы их решения. Только в XVI в. благодаря исследованиям французского математика Франсуа Виета (1540—1603) впервые уравнения второй степени, так же, впрочем, как третьей и четвертой степеней, стали рассматривать в буквенных обозначениях. Виет впервые ввел буквенные обозначения не только для неизвестных величин, но и для данных, т. е. коэффициентов уравнений. Особенно ценил Виет открытые им формулы, называемые теперь формулами Виета. Однако Виет признавал только положительные корни.


Архимед

Лишь в XVII в. после работ Р. Декарта, И. Ньютона и других математиков решение квадратных уравнений принимает современный вид.

Параболу знал еще Архимед, математик и механик Древней Греции. Он применял ее для решения ряда практических задач — в судоходстве и военном деле. Парабола $y = x^2$ и график функции $y = x^n$ для $n = 3, 4, 5, \ldots$ играют большую роль в математике. Изучив свойства функции $y = x^n$, мы получили представления о ее графике, который, в свою очередь, помог нам убедиться в существовании, например, корней степени n из положительных чисел.

Способы извлечения корня степени n известны давно. Например, хорезмский математик Бируни (973 — ок. 1050) в своей книге «Ключ арифметики» описывает способ извлечения корня с любым натуральным показателем. Однако этот способ громоздок и неудобен. В XVI в. голландский ученый С. Стевин предложил понимать $\sqrt[n]{a}$ как степень числа a с дробным показателем $\frac{1}{n}$. Равенство $a^0 = 1$ применял в начале XV в. самаркандский ученый аль-Каши. Независимо от него нулевой показатель степени ввел в XV в. Н. Шюке. Он же ввел и отрицательные целые показатели степени. Систематически нулевые, отрицательные и дробные показатели степени стал применять И. Ньютон.

Рациональная степень числа позволяет определить показательную функцию $y = a^x$. Показательная функция имеет большое значение в математике. Существенный вклад в ее изучение внес Л. Эйлер.

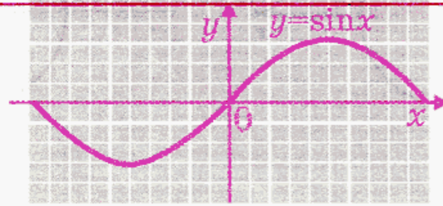
Логарифмы открыты в XVI в. в связи с быстрым развитием астрономии, требовавшей сложных и точных вычислений. Французский математик Пьер Лаплас (1749—1827) писал, что «изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь ...». Изобретателем логарифмов считают шотландского математика Джона Непера (1550—1617). Непер опубликовал оригинальные по тем временам труды «Описание удивительной таблицы логарифмов» и «Построение удивительной таблицы логарифмов». В этих трудах Непер дал объяснение свойств логарифмов и снабдил их таблицами логарифмов величин, важных в практике вычислений.

По совету Непера английский математик Генри Бригс (1561—1630) создал четырнадцатизначные таблицы десятичных логарифмов (1624), которыми пользуются до настоящего времени и зовут бригговыми. С помощью таблицы логарифмов можно вычислять произведение и частное чисел, возводить в степень, извлекать корни любых степеней.

Долгое время этот способ вычисления широко употреблялся на практике. Еще быстрее подобные вычисления производились на логарифмической линейке. Однако мы вступили в новую фазу технического прогресса, когда электронная техника привела к возможности производить вычисления моментально. Вычисления по таблицам и с помощью логарифмической линейки теперь уже выглядят допотопными.

С другой стороны, теоретическое значение понятия логарифма по-прежнему остается важным. Полная теория логарифмов была впервые получена в трудах Л. Эйлера.

Глава II
Тригонометрические формулы
Тригонометрические функции



Слово «тригонометрия» греческое, оно переводится как «измерение треугольников». Как вам известно из геометрии, синус, косинус, тангенс и котангенс угла используются при решении треугольников, поэтому формулы для них называют тригонометрическими.

В курсе геометрии синус, косинус, тангенс и котангенс рассматривались для углов, не больших развернутого. В этой главе обобщено понятие угла и на него распространены понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

§ 7. Синус и косинус угла

7.1. Понятие угла

Введем на плоскости прямоугольную систему координат xOy с положительной полуосью абсцисс Ox, направленной вправо, и с положительной полуосью ординат Oy, направленной вверх, и рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат. Пусть положительная полуось Ox пересекает окружность в точке A и пусть на окружности дана еще точка B. Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ образуют угол AOB (рис. 70, *а*).

Будем считать, что наряду с фиксированными векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ есть еще вектор, начало которого — точка O, а конец — точка, движущаяся по окружности. Этот вектор назовем **подвижным вектором.**

Используя язык механики, можно сказать, что угол AOB получен поворотом подвижного вектора от вектора $\overrightarrow{OA}$ до вектора $\overrightarrow{OB}$ (на рисунке 70, *б* стрелка показывает, как двигался подвижный вектор).

Отметим, что угол AOB образован поворотом, при котором конец подвижного вектора, двигаясь по окружности, прошел дугу, не большую полуокружности (см. рис. 70, *б*).

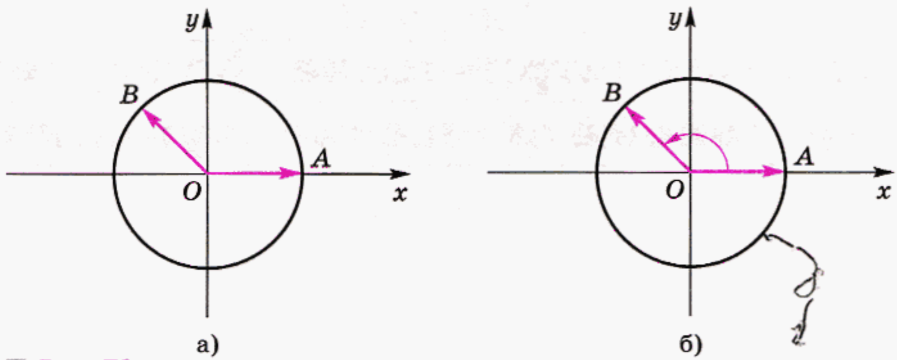


Рис. 70

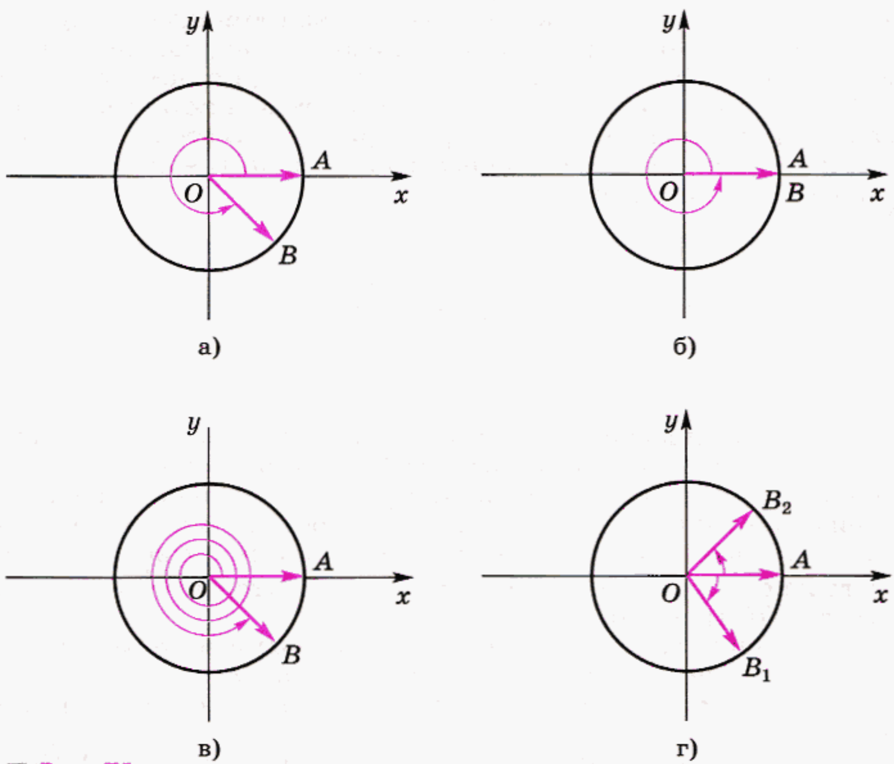


Рис. 71

Однако можно совершить и такой поворот, что конец подвижного вектора, двигаясь по окружности, пройдет дугу, большую, чем полуокружность (рис. 71, *а*).

В тригонометрии принято считать, что любой поворот подвижного вектора образует угол.

Таким образом, при повороте подвижного вектора может образоваться как угол, меньший развернутого (см. рис. 70, *б*), так и угол, больший развернутого (см. рис. 71, *а*).

Пусть подвижный вектор совершил такой поворот, что впервые его конечное положение (вектор $\overrightarrow{OB}$) совпало с начальным положением (вектором $\overrightarrow{OA}$). Такой поворот называют **полным оборотом** (рис. 71, *б*).

Поворот подвижного вектора может складываться из нескольких полных оборотов и поворота, составляющего часть полного оборота (рис. 71, *в*).

Любой поворот подвижного вектора может быть совершен в двух противоположных направлениях: по часовой стрелке и против часовой стрелки (рис. 71, *г*).

В тригонометрии принято считать углы, образованные поворотом подвижного вектора против часовой стрелки, **положительными**, а углы, образованные поворотом подвижного вектора по часовой стрелке, **отрицательными**.

Если подвижный вектор не совершил поворота, то будем считать, что образован **нулевой угол**.

Пусть подвижный вектор совершил поворот, равный $\frac{1}{360}$ части полного оборота против часовой стрелки. В этом случае говорят, что образован угол, **градусная мера** которого равна одному градусу, или, короче, угол в один градус (пишут $1°$).

Следовательно, совершив полный оборот против часовой стрелки, получим угол в $360°$ (рис. 72, *а*), а совершив один полный оборот по часовой стрелке, получим угол в $-360°$ (рис. 72, *б*).

Совершив поворот в половину полного оборота против часовой стрелки, получим угол в $180°$ (рис. 73, *а*); совершив поворот в четверть полного поворота по часовой стрелке, получим угол в $-90°$ (рис. 73, *б*).

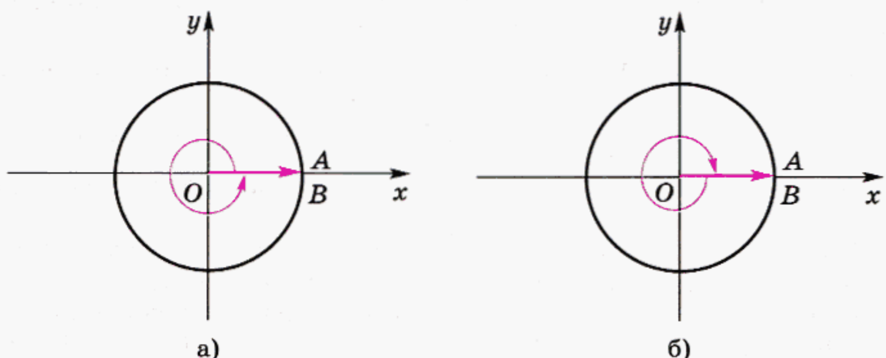
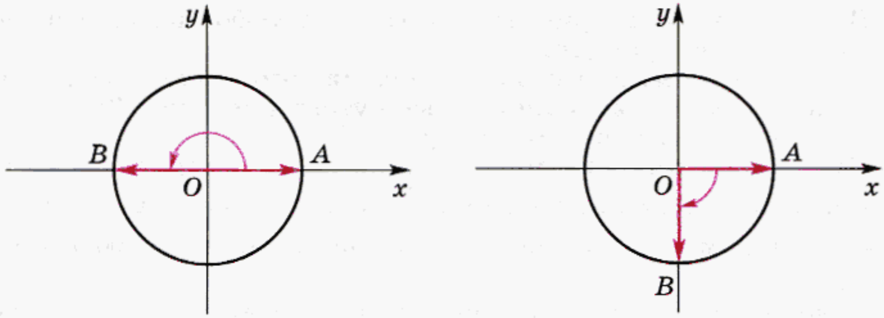
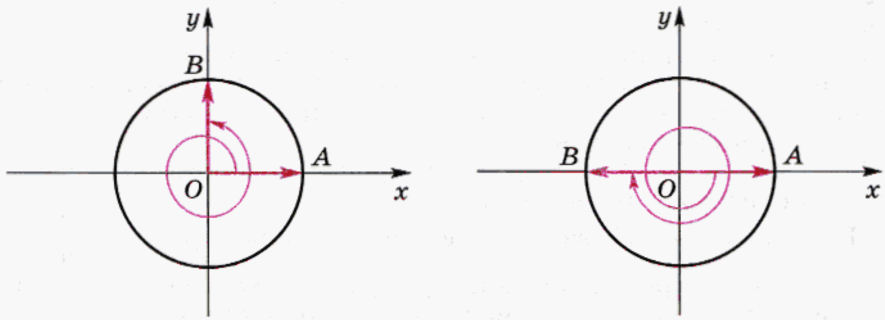


Рис. 72



а) б)

Рис. 73



а) б)

Рис. 74

Так как $450° = 90° + 360°$, то, совершив поворот в четверть полного оборота против часовой стрелки, а затем еще полный оборот против часовой стрелки, получим угол в $450°$ (рис. 74, *а*). Поскольку $-540° = -180° - 360°$, то, совершив поворот в половину полного оборота по часовой стрелке, а затем еще полный оборот по часовой стрелке, получим угол в $-540°$ (рис. 74, *б*).

Напомним, что $1'$ (одна минута) равна $\frac{1}{60}$ части градуса, а $1''$ (одна секунда) равна $\frac{1}{60}$ части минуты. Заметим, что в вычислительной практике минуты и секунды часто записываются в виде десятичных долей градуса.

Для любого действительного числа α существует, и притом только один, угол, градусная мера которого равна α.

Этот угол отложен от начального вектора в положительном направлении при $\alpha > 0$ и в отрицательном при $\alpha < 0$. При $\alpha = 0$ это нулевой угол.

Отметим, что градусную меру любого угла α можно записать в виде

$$\alpha = \alpha_0 + 360° \cdot k,$$

где α_0 удовлетворяет неравенствам $0° \leqslant \alpha_0 < 360°$, а k — некоторое целое число.

Поэтому при $k \neq 0$ угол с градусной мерой α можно получить как результат двух поворотов: в положительном направлении на угол с градусной мерой α_0 и на $|k|$ полных оборотов в положительном направлении при $k > 0$ и в отрицательном направлении при $k < 0$.

ПРИМЕР 1. Так как $2000° = 200° + 5 \cdot 360°$, то угол в $2000°$ можно получить как результат двух поворотов: в положительном направлении на $200°$ и в положительном направлении на 5 полных оборотов.

ПРИМЕР 2. Так как $-2000° = 160° - 6 \cdot 360°$, то угол в $-2000°$ можно получить как результат двух поворотов: в положительном направлении на $160°$ и в отрицательном направлении на 6 полных оборотов.

Замечание. Из сказанного выше ясно, что только в случае, когда угол, рассматриваемый в тригонометрии, неотрицателен и не больше развернутого, его можно отождествить с углом, рассматриваемым в геометрии.

Поэтому введенное в этом пункте понятие угла является обобщением понятия угла, рассматриваемого в геометрии.

7.1° Какой поворот называют полным оборотом?

7.2° а) Какой угол называют: нулевым; положительным; отрицательным?

б) Какой угол называют углом в один градус? Сколько градусов содержит полный оборот?

7.3° Для любого ли числа α существует угол, градусная мера которого равна α?

7.4 На рисунке 75, *а* — *е* изображен угол AOB, полученный поворотом подвижного вектора от вектора $\overrightarrow{OA}$ до вектора $\overrightarrow{OB}$. Сколько полных оборотов содержит угол AOB?

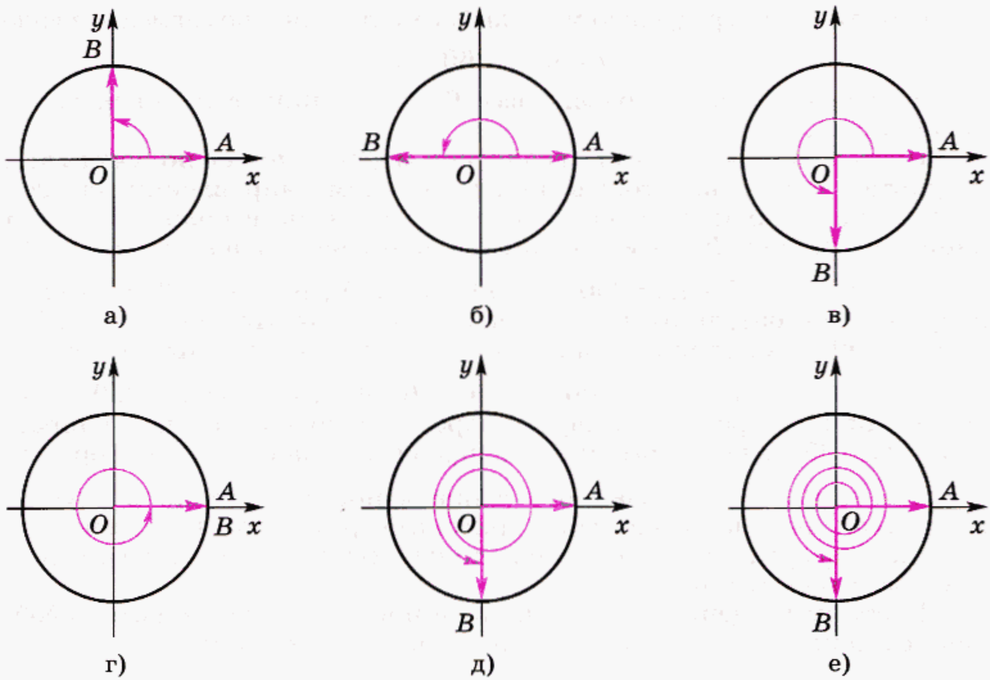
7.5 Изобразите на координатной плоскости угол AOB, полученный поворотом подвижного вектора от вектора $\overrightarrow{OA}$ до вектора $\overrightarrow{OB}$ на:

а) $\frac{1}{2}$ полного оборота; б) 0,25 полного оборота;

в) $\frac{3}{4}$ полного оборота; г) 1,75 полного оборота;

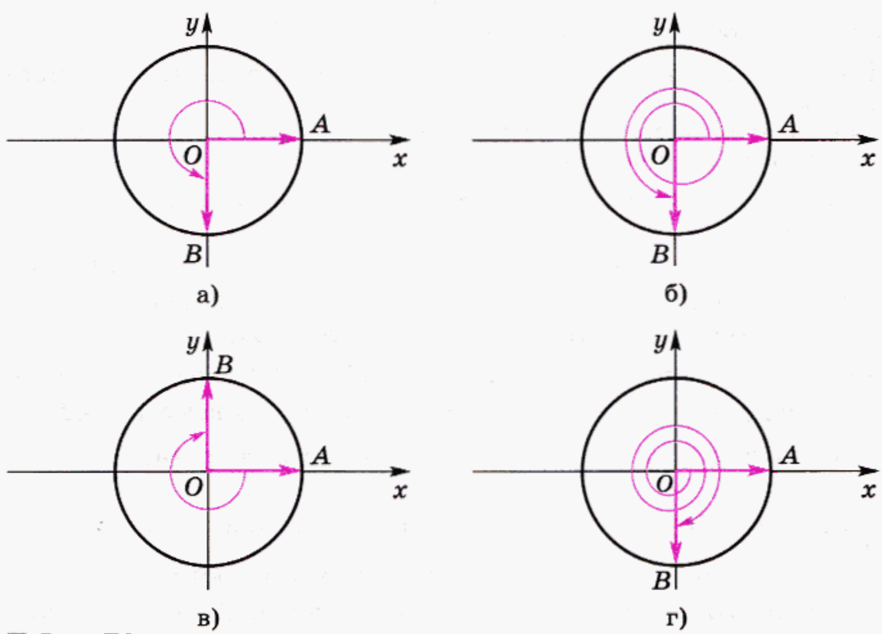
д) 1 полный оборот; е) 2,5 полного оборота

по часовой стрелке (против часовой стрелки). Определите градусную меру угла AOB.



y
B
A
O
x
а)
y
B
A
O
x
б)
y
A
O
x
B
в)
y
A
O
B
x
г)
y
A
O
x
B
д)
y
A
O
x
B
е)

Рис. 75



y
A
O
x
B
а)
y
A
O
x
B
б)
y
B
A
O
x
в)
y
A
O
x
B
г)

Рис. 76

С помощью транспортира изобразите на координатной плоскости угол AOB, полученный поворотом подвижного вектора от вектора $\overrightarrow{OA}$ до вектора $\overrightarrow{OB}$, если градусная мера этого угла равна **(7.6—7.7)**:

7.6 а) $60°$; б) $120°$; в) $200°$; г) $245°$;
д) $270°$; е) $300°$; ж) $380°$; з) $420°$.

7.7 а) $-45°$; б) $-30°$; в) $-120°$; г) $-160°$;
д) $-270°$; е) $-300°$; ж) $-500°$; з) $-1000°$.

7.8 Запишите градусную меру угла AOB, изображенного на рисунке 76, *а—г*.

7.9 Сколько полных оборотов и в каком направлении содержит угол, градусная мера которого равна:
а) $700°$; б) $-320°$; в) $2000°$; г) $3800°$;
д) $-600°$; е) $-800°$; ж) $-1500°$; з) $-2400°$?

7.10 На рисунке 77, *а—г* изображен вектор $\overrightarrow{OB}$ ($\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$) — конечное положение подвижного вектора после поворота на некоторый угол от его начального положения — вектора $\overrightarrow{OA}$.

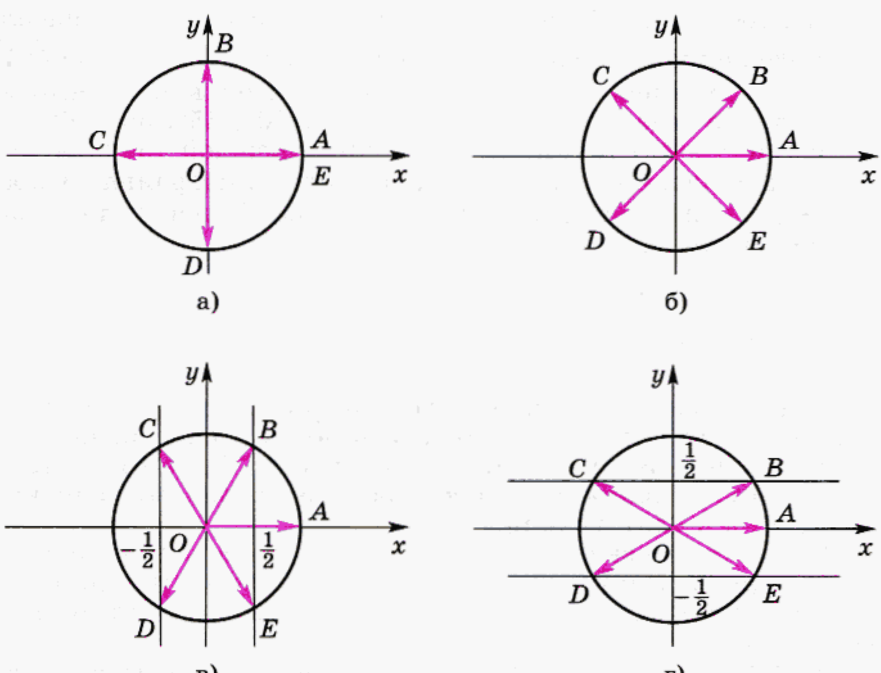


Рис. 77

а) Изобразите углы AOB, AOC, AOD, AOE, имеющие наименьшую по абсолютной величине градусную меру.

б) Запишите градусные меры всех возможных углов AOB, AOC, AOD, AOE. Например, все возможные углы AOB на рисунке 77, *а* можно записать в виде $90° + 360° \cdot n$, $n \in \mathbf{Z}$.

7.11 Постройте без помощи транспортира на координатной плоскости углы:

а) $90°$, $180°$, $270°$, $360°$; б) $45°$, $135°$, $225°$, $315°$;

в) $60°$, $120°$, $240°$, $300°$; г) $30°$, $150°$, $210°$, $330°$;

д) $-45°$, $-90°$, $-135°$, $-180°$; е) $-60°$, $-120°$, $-240°$, $-300°$.

7.12 Укажите наименьший по абсолютной величине угол среди данных углов:

а) $30° + 360° \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$; б) $-120° + 360° \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$;

в) $270° + 360° \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$; г) $-270° + 360° \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$;

д) $400° + 360° \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$; е) $-700° + 360° \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

7.13 Представьте следующие углы в виде $\alpha + 360° \cdot n$, где $0° \leqslant \alpha < 360°$, n — некоторое целое число:

а) $400°$; б) $-500°$; в) $600°$; г) $-900°$.

7.14 а) Постройте окружность радиуса 5 см с центром в начале системы координат. Точку ее пересечения с положительной полуосью Ox обозначьте A_0. Считая вектор $\overrightarrow{OA_0}$ начальным положением подвижного вектора, постройте вектор $\overrightarrow{OA_\alpha}$, где α — градусная мера угла поворота подвижного вектора. Выполните задание при α, равном: $0°$; $30°$; $45°$; $60°$; $90°$.

б) Постройте точки, симметричные каждой точке A_α относительно: оси Ox; оси Oy; начала системы координат. Определите углы поворота, при которых точка A_α переходит в построенные точки.

7.2. Радианная мера угла

Пусть подвижный вектор совершил такой поворот против часовой стрелки, что его конец, двигаясь по окружности, прошел расстояние, равное радиусу R этой окружности. Тогда говорят, что образован угол, **радианная мера** которого равна одному радиану, или, короче, угол в один радиан.

Можно также сказать, что **радиан** — это величина центрального угла окружности радиуса R, опирающегося на дугу длины R. Из геометрии известно, что эта величина не зависит от R. Поэтому обычно выбирают $R = 1$.

Поскольку длина окружности равна $2\pi R$, то, совершив один полный оборот против часовой стрелки, получим угол в 2π радиан.

Следовательно, угол в 2π радиан и угол в $360°$ — это один и тот же угол. Но тогда угол в $1°$ и угол в $\frac{2\pi}{360}$ радиан также один и тот же угол. Поэтому пишут: $360° = 2\pi$ радиан, 1 радиан $= \frac{180°}{\pi} \approx 57°17'45''$, $1° = \frac{\pi}{180}$ радиан, -5 радиан $= -\frac{5}{\pi} \cdot 180° \approx -286°$, $-360° = -2\pi$ радиан, α радиан $= \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180°$.

Слово «радиан» в таких записях обычно опускают, но подразумевают его. Например, пишут: $180° = \pi$, $-\frac{\pi}{3} = -60°$, $1 = \frac{180°}{\pi}$, $1° = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017453\ldots$.

Поскольку $-\frac{7\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi - 2\pi$, то, совершив поворот в три четверти полного оборота по часовой стрелке, затем полный оборот по часовой стрелке, получим угол в $-\frac{7\pi}{2}$ (рис. 78, *а*).

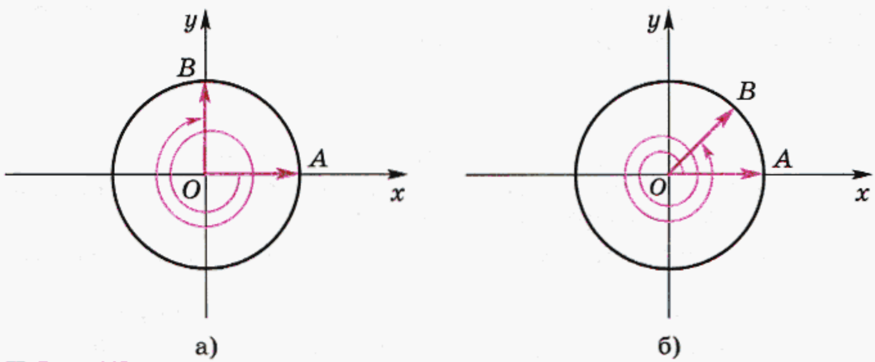


Рис. 78

Так как $\frac{17\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi$, то, совершив поворот в восьмую часть полного оборота против часовой стрелки, а затем два полных оборота против часовой стрелки, получим угол в $\frac{17\pi}{4}$ (рис. 78, *б*).

Для любого действительного числа α существует, и притом только один, угол, радианная мера которого равна α радиан и этот угол отложен от начального вектора в положительном направлении при $\alpha > 0$ и в отрицательном при $\alpha < 0$. При $\alpha = 0$ это нулевой угол.

Отметим, что для любого угла его меру α (радиан) можно записать в виде $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, где α_0 (радиан) удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi$, а k — некоторое целое число.

Поэтому при $k \neq 0$ угол α можно получить как результат двух поворотов: в положительном направлении на угол α_0 и на $|k|$ полных поворотов в положительном направлении при $k > 0$ и в отрицательном направлении при $k < 0$.

ПРИМЕР 1. Так как $\frac{19\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi$, то угол в $\frac{19\pi}{4}$ можно получить как результат двух поворотов: в положительном направлении на угол $\frac{3\pi}{4}$ и в положительном направлении на 2 полных оборота.

ПРИМЕР 2. Так как $-\frac{11}{2}\pi = \frac{\pi}{2} - 3 \cdot 2\pi$, то угол в $-\frac{11}{2}\pi$ можно получить как результат двух поворотов: в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$ и в отрицательном направлении на 3 полных оборота.

Далее в этой главе будет рассматриваться в основном радианная мера угла и утверждения будут доказаны для радианной меры угла. Однако их можно переформулировать и для градусной меры угла, пользуясь приведенными выше соотношениями.

Условимся далее вместо слов «угол, радианная мера которого равна α радиан» говорить коротко «угол α».

7.15 а) Какой угол называют углом в 1 радиан?
б) Сколько радиан содержит полный оборот; половина полного оборота; четверть полного оборота?

7.16 Выразите в радианах величину угла, градусная мера которого равна:
а) $360°$; $180°$; $90°$; $270°$; $0°$;
б) $45°$; $135°$; $225°$; $315°$;
в) $60°$; $120°$; $240°$; $300°$;
г) $30°$; $150°$; $210°$; $330°$;
д) $-45°$; $-90°$; $-135°$; $-180°$;
е) $-270°$; $-360°$; $-1800°$.

7.17 Выразите в градусах величину угла, радианная мера которого равна:
а) 2π; π; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; 0;
б) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$;
в) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$;
г) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$;
д) $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{12}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{6}$;
е) $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{5}$; $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.

7.18 Известно, что $\pi \approx 3{,}14159$. Определите с недостатком с точностью до 0,01 радианную меру:
а) полного оборота;
б) половины полного оборота;
в) четверти полного оборота;
г) трети полного оборота.

7.19 Известно, что 1 радиан $\approx 57°$. Изобразите на глаз угол в 1; 2; 3; 4; 5; 6 радиан. Проверьте свой глазомер, измерив построенные углы с помощью транспортира.

7.20 Какой угол больше:
а) 3 радиана или π радиан; б) 6 радиан или 2π радиан?

7.21 Сколько полных оборотов и в каком направлении содержит угол, радианная мера которого равна:
а) 4π; -6π; 12π; -7π; б) $-0{,}5\pi$; $3\frac{1}{3}\pi$; $-13{,}2\pi$; $21{,}7\pi$?

7.22 Запишите в виде $\alpha + 2\pi \cdot n$, где n — некоторое целое число ($0 \leqslant \alpha < 2\pi$), следующие углы:
а) $6{,}5\pi$; б) $\frac{9}{2}\pi$; в) $-12\frac{1}{3}\pi$; г) $-17\frac{1}{6}\pi$.

7.23 По рисунку 77 (см. с. 199) запишите:
а) наименьшую положительную радианную меру углов AOB, AOC, AOD, AOE;
б) наименьшую по абсолютной величине радианную меру углов AOB, AOC, AOD, AOE;
в) радианную меру всех возможных углов AOB, AOC, AOD, AOE. Например, все возможные углы AOB на рисунке 77, *а* можно записать в виде $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

7.3. Определение синуса и косинуса угла

Далее рассматривается прямоугольная система координат xOy, у которой положительная полуось Ox направлена вправо, а положительная полуось Oy направлена вверх. Напомним, что единичным вектором координатной оси Ox называют вектор, имеющий длину 1, начало в точке O и направленный в положительном направлении оси Ox.

Единичной окружностью в тригонометрии называют окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат xOy при условии, что единичный вектор OA оси Ox принят за начальное положение подвижного вектора и что направление поворота против часовой стрелки принято за положительное.

Пусть подвижный вектор, совершив поворот от вектора OA до вектора OB, образует угол AOB, радианная мера которого равна α радиан. Точку B единичной окружности назовем точкой, соответствующей углу α (рис. 79), или, коротко, точкой α.

Заметим, что точка α единичной окружности для любого целого числа k совпадает с точками $\alpha + 2\pi k$, где k — любое целое число.

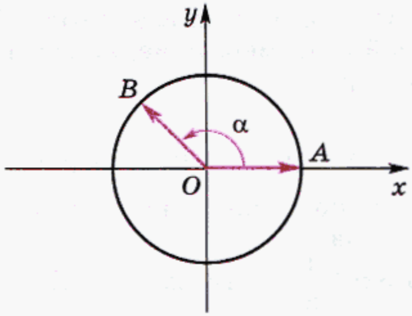


Рис. 79

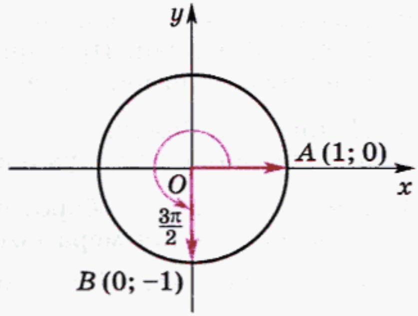


Рис. 80

Число, равное ординате точки единичной окружности, соответствующей углу α, называют **синусом угла** α и обозначают $\sin\alpha$.
Число, равное абсциссе точки единичной окружности, соответствующей углу α, называют **косинусом угла** α и обозначают $\cos\alpha$.

Замечание. Для углов, радианная мера которых заключена между 0 и $\frac{\pi}{2}$, приведенное определение синуса и косинуса угла совпадает с определением, известным из курса геометрии.

Из сказанного выше следует, что для любого угла α:
1) существует синус этого угла и притом единственный;
2) существует косинус этого угла и притом единственный.

Поэтому часто говорят, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ есть функции угла α.

ПРИМЕР 1. Вычислим $\sin 0$ и $\cos 0$, $\sin\frac{3\pi}{2}$ и $\cos\frac{3\pi}{2}$.

Углу 0 радиан соответствует точка $A(1; 0)$, следовательно, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$. Углу $\frac{3\pi}{2}$ радиан соответствует точка $B(0; -1)$, следовательно, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ (рис. 80).

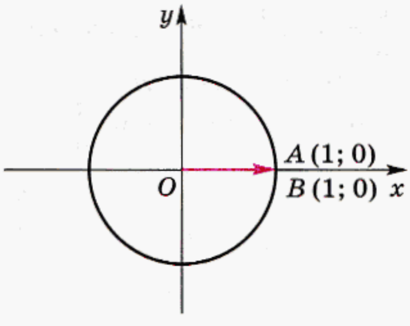
ПРИМЕР 2. Найдем все углы α, для каждого из которых $\sin\alpha = 0$.

Из определения синуса угла следует, что $\sin 0 = 0$, $\sin\pi = 0$, $\sin(-\pi) = 0$, $\sin 2\pi = 0$, $\sin(-2\pi) = 0$, $\sin 3\pi = 0$, $\sin(-3\pi) = 0$, ... (рис. 81, *а*, *б*), т. е.

$$\sin k\pi = 0$$

для любого целого числа k.

В таких случаях говорят, что все углы α, для каждого из которых $\sin\alpha = 0$, задаются формулой $\alpha = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.



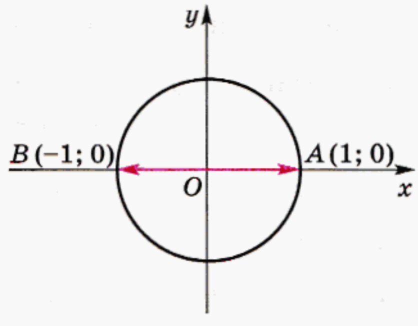


Рис. 81

Таким образом, $\sin \alpha = 0$ для углов $\alpha = k\pi$, где k — любое целое число. Для любых углов α, отличных от $k\pi$, $\sin \alpha \neq 0$.

ПРИМЕР 3. Найдем все углы α, для каждого из которых $\cos \alpha = 0$.

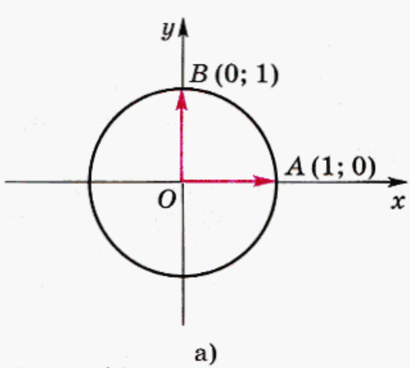
Из определения косинуса угла следует, что $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\cos \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\cos \frac{5\pi}{2} = 0$, $\cos \left(-\frac{5\pi}{2}\right) = 0, \ldots$ (рис. 82, *а*, *б*), т. е.

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$

для любого целого числа k.

В таких случаях говорят, что все углы α, для каждого из которых $\cos \alpha = 0$, задаются формулой $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Таким образом, $\cos \alpha = 0$ для углов $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где k — любое целое число. Для любых углов α, отличных от $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $\cos \alpha \neq 0$.



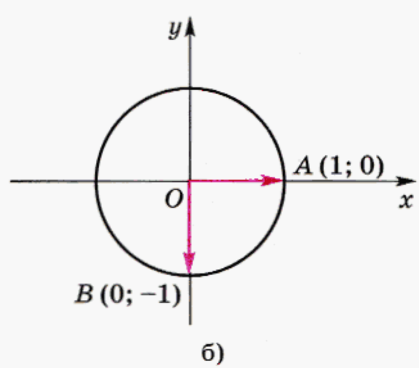


Рис. 82

Так как $0 = 0°$, $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{\pi}{3} = 60°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$, а значения синусов и косинусов углов 0°, 30°, 45°, 60°, 90° известны из геометрии, то получаем значения синусов и косинусов углов $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Для углов, радианная мера которых заключена между 0 и $\frac{\pi}{2}$, их синусы и косинусы можно находить приближенно с помощью таблиц или электронных калькуляторов.

ПРИМЕР 4. Вычислим $\sin\frac{5\pi}{4}$ и $\cos\frac{5\pi}{4}$.

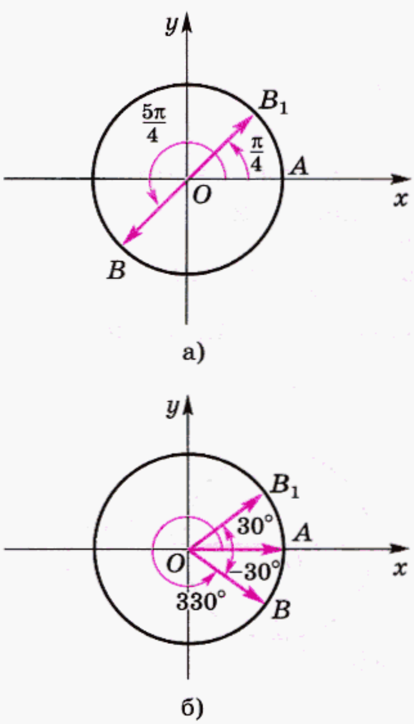


Рис. 83

Так как $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$, то точки B и B_1 симметричны относительно начала координат, поэтому координаты точек B и B_1 — противоположные числа (рис. 83, *а*). Так как $\angle AOB_1 = \frac{\pi}{4}$, то точка B_1 имеет координаты $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (см. таблицу), следовательно, точка B имеет координаты $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, поэтому $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ПРИМЕР 5. Вычислим $\sin 330°$ и $\cos 330°$.

Так как $330° = 360° - 30°$, то точки B и B_1 (рис. 83, *б*) симметричны относительно оси Ox, то абсциссы точек B и B_1 равны, а ординаты — противоположные числа. Так как $\angle AOB_1 = 30° = \frac{\pi}{6}$, то точка B_1 имеет координаты $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ (см. таблицу). Следовательно, точка B имеет координаты $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$, поэтому $\sin 330° = -\frac{1}{2}$, $\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Справедливы следующие свойства $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Малому изменению угла α соответствует малое изменение синуса и косинуса (рис. 84).

2. Для любых углов α_1 и α_2, таких, что

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

справедливо неравенство

$$\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2. \tag{2}$$

Покажем это. Пусть на координатной плоскости дана единичная окружность. Для углов, удовлетворяющих условию (1), очевидно, что ордината точки B_1, соответствующая углу α_1, меньше ординаты точки B_2, соответствующей углу α_2, т. е. $y_1 < y_2$ (рис. 84). По определению синус угла есть число, равное ординате соответствующей точки единичной окружности, значит, справедливость неравенства $y_1 < y_2$ означает справедливость неравенства (2), что и требовалось доказать.

Аналогично показывается справедливость следующих утверждений:

3. Для любых углов α_1 и α_2, таких, что $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \frac{3\pi}{2}$, справедливо неравенство $\sin\alpha_1 > \sin\alpha_2$ (рис. 85).

4. Для любых углов α_1 и α_2, таких, что $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \pi$, справедливо неравенство $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$ (рис. 86).

5. Для любых углов α_1 и α_2, таких, что $\pi \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant 2\pi$, справедливо неравенство $\cos\alpha_1 < \cos\alpha_2$ (рис. 87).

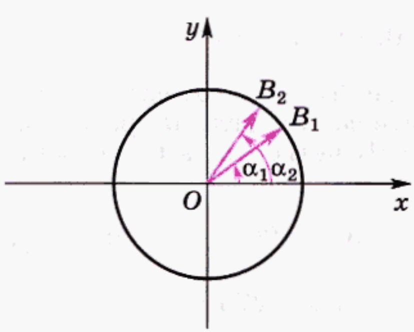


Рис. 84

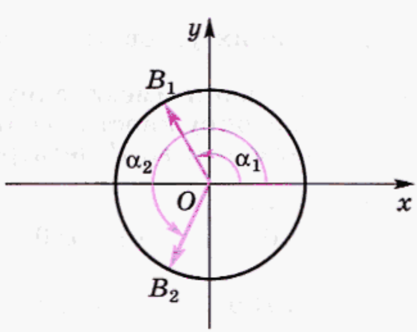


Рис. 85

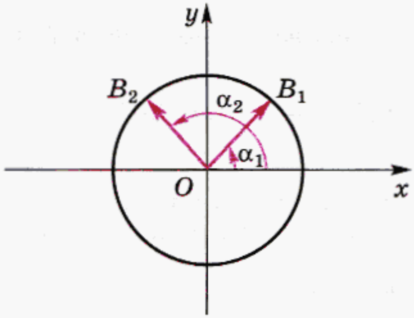


Рис. 86

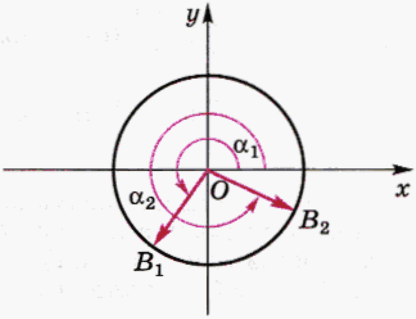


Рис. 87

Свойства 2 и 3 означают, что фунция $\sin\alpha$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает, а на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ убывает, а свойства 4 и 5 означают, что функция $\cos\alpha$ на промежутке $[0; \pi]$ убывает, а на промежутке $[\pi; 2\pi]$ возрастает.

7.24 а) Какую окружность в тригонометрии называют единичной окружностью?
б) Какой вектор принят за начальное положение подвижного вектора?
в) Какое направление поворота принято за положительное?

7.25 а) Какую точку единичной окружности называют точкой, соответствующей углу α?
б) Что называют: синусом угла α; косинусом угла α?
в) Для какого угла α существует: $\sin\alpha$; $\cos\alpha$?
г) Единственный или нет для данного угла α: $\sin\alpha$; $\cos\alpha$?

7.26 Для каких углов α: а) $\sin\alpha = 0$; б) $\cos\alpha = 0$?

7.27 Какие знаки имеют синус и косинус угла α, если точка единичной окружности, соответствующая углу α, расположена: в I четверти; во II четверти; в III четверти; в IV четверти?

7.28 Найдите:

а) $\sin 0°$;	б) $\cos 0$;	в) $\sin 90°$;	г) $\cos\frac{\pi}{2}$;
д) $\sin 180°$;	е) $\cos\pi$;	ж) $\sin 270°$;	з) $\cos\frac{3\pi}{2}$;
и) $\sin 2\pi$;	к) $\cos 360°$;	л) $\sin 0$;	м) $\cos 0°$.

7.29 Используя свойства прямоугольных треугольников, найдите:

а) $\sin 45°$; б) $\cos\frac{\pi}{4}$; в) $\sin\frac{\pi}{6}$;

г) $\cos 30°$; д) $\sin 60°$; е) $\cos\frac{\pi}{3}$.

Вычислите, сделав рисунок **(7.30—7.32)**:

7.30 а) $\sin 120°$; б) $\cos\frac{2\pi}{3}$; в) $\sin 135°$; г) $\cos\frac{3\pi}{4}$;

д) $\sin\frac{5\pi}{6}$; е) $\cos 150°$; ж) $\sin\pi$; з) $\cos 180°$.

7.31 а) $\sin 225°$; б) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; в) $\sin(-\pi)$;

г) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; д) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; е) $\cos\frac{3\pi}{2}$.

7.32 а) $\sin\frac{11\pi}{2}$; б) $\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$; в) $\sin\frac{7\pi}{3}$; г) $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$.

7.33 На миллиметровой бумаге постройте систему координат с единичным отрезком 10 см. Постройте окружность с центром в начале координат, проходящую через точку (1; 0). Найдите приближенно (с точностью до сотых):

а) $\sin 30°$; б) $\cos 60°$; в) $\sin 150°$;
г) $\cos 150°$; д) $\sin 190°$; е) $\cos 250°$;
ж) $\sin 250°$; з) $\cos 300°$; и) $\sin 300°$.

7.34 а) На единичной окружности постройте точки A_α, соответствующие углам α, равным $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Найдите синусы и косинусы этих углов.

б) Постройте точки, симметричные точкам A_α относительно: оси Ox; оси Oy; начала системы координат. Определите радианную меру углов, которым соответствуют построенные точки. Найдите синусы и косинусы этих углов.

Найдите синусы и косинусы следующих углов, где k — любое целое число **(7.35—7.36)**:

7.35 а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; б) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; в) $\pi+2\pi k$;

г) $-\pi+2\pi k$; д) $2\pi k$; е) $4\pi k$.

7.36 а) πk; б) $-\pi k$; в) $\frac{\pi}{2}k$;

г) $-\frac{\pi}{2}k$; д) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; е) $-\frac{\pi}{2}+\pi k$.

7.37 Верно ли равенство:

а) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2}$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$?

7.38 Отметьте на единичной окружности точки, соответствующие углам, радианная мера которых равна 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Определите знак синуса и знак косинуса для каждого из этих углов.

7.39 а) Если отмечать на единичной окружности точки, соответствующие углам, радианная мера которых равна 1, 2, 3, 4, ... , то могут ли какие-нибудь из этих точек совпасть?

б) Докажите, что если на единичной окружности отметить точку, соответствующую углу, радианная мера которого есть рациональное число, то она не соответствует никакому другому углу, радианная мера которого есть другое рациональное число.

7.40 Определите знак числа:

а) $\sin 4$; б) $\cos\frac{3\pi}{4}$; в) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; г) $\cos(-4)$.

7.41 Выполняется ли равенство $\cos\alpha = \sin\alpha$ при каком-нибудь α? Проиллюстрируйте решение на рисунке.

7.42 Отметьте на единичной окружности все точки, соответствующие углам α, для которых:

а) $\cos\alpha > 0$; б) $\cos\alpha < 0$; в) $\sin\alpha \leqslant 0$; г) $\sin\alpha \geqslant 0$.

Что больше **(7.43—7.44)**:

7.43 а) $\sin 40°$ или $\sin\frac{\pi}{4}$; б) $\cos\frac{\pi}{3}$ или $\cos 60°$;

в) $\sin 120°$ или $\sin 130°$; г) $\cos\frac{3\pi}{4}$ или $\cos\pi$;

д) $\sin 300°$ или $\sin 130°$; е) $\cos\frac{3\pi}{4}$ или $\cos\frac{\pi}{2}$;

ж) $\sin(-300°)$ или $\cos 120°$; з) $\cos\frac{13\pi}{4}$ или $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$?

7.44 а) $\sin 3$ или $\sin\pi$; б) $\cos 4$ или $\cos 5$;

в) $\sin 1$ или $\sin(-1)$; г) $\cos(-2)$ или $\cos 2$;

д) $\sin 1$ или $\sin 2$; е) $\cos 2$ или $\cos 3$;

ж) $\sin 3$ или $\cos 3$; з) $\sin 3$ или $\sin 5$?

7.45 Определите знак произведения:

а) $\cos 130° \cdot \sin 170°$; б) $\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$;

в) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; г) $\cos\frac{11}{4}\pi\cdot\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$.

Упростите выражение **(7.46—7.47)**:

7.46 а) $3\cos 0 + 2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\frac{\pi}{2} - 7\sin(-\pi)$;

б) $\cos\frac{\pi}{2} - 3\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + 4\cos(-2\pi) - 2\sin(-3\pi)$.

7.47 а) $\sin\frac{\pi}{4} + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\frac{5\pi}{6}$;

б) $3\cos\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{2\pi}{3} + 7\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$;

в) $3\cos\frac{7\pi}{4} + 2\sin\frac{3\pi}{4} - \sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right) + 7\cos\frac{13\pi}{2}$;

г) $2\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + 11\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) + \sin\frac{7\pi}{6} - 8\cos\frac{2\pi}{3}$.

7.4. Основные формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$

ТЕОРЕМА 1. Для любого угла α справедливо равенство

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (1)$$

Это равенство называют **основным тригонометрическим тождеством.**

Доказательство. Как известно, окружность радиуса 1 с центром в начале координат имеет уравнение

$$x^2 + y^2 = 1. \qquad (2)$$

Как следует из определения синуса и косинуса угла α, точка $B(x; y)$, принадлежащая этой окружности и соответствующая углу α, имеет координаты

$$x = \cos\alpha,\ y = \sin\alpha,$$

которые удовлетворяют уравнению (2). Подставляя их значения в уравнение (2), получим равенство (1).

Теорема 1 доказана.

ПРИМЕР 1. Вычислим $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и угол α принадлежит интервалу $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Из основного тригонометрического тождества следует, что $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$. Для любого угла α из указанного интервала $\sin\alpha < 0$, следовательно, $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого угла α справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\sin\alpha| &\leqslant 1, \\ |\cos\alpha| &\leqslant 1. \end{aligned} \qquad (3)$$

Действительно, так как $\cos^2\alpha \geqslant 0$ для любого угла α, то

$$\sin^2\alpha \leqslant \sin^2\alpha + \cos^2\alpha,$$

откуда, применяя основное тригонометрическое тождество, получим, что $\sin^2\alpha \leqslant 1$, или $|\sin\alpha| \leqslant 1$.

Аналогично доказывается справедливость неравенства $|\cos\alpha| \leqslant 1$.

Заметим, что неравенства (3) можно записать и в другой форме:

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

ТЕОРЕМА 2. Для любого угла α справедливы равенства

$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos\alpha, \\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha. \end{aligned} \qquad (4)$$

Доказательство. Точка B, соответствующая углу α, и точка B_1, соответствующая углу $(-\alpha)$, симметричны относительно оси Ox (рис. 88). Поэтому абсциссы этих точек равны, а ординаты — противоположные числа. Следовательно, справедливы равенства (4).

Теорема 2 доказана.

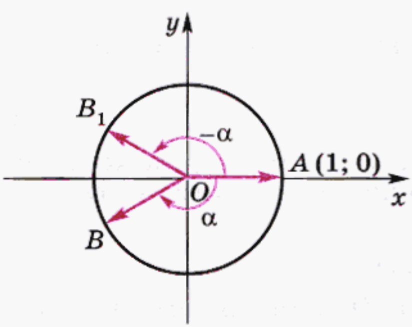


Рис. 88

ПРИМЕР 2.

а) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;

б) $\cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin(-45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ТЕОРЕМА 3. Для любого угла α и любого целого числа k справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 2\pi k) &= \sin\alpha, \\ \cos(\alpha + 2\pi k) &= \cos\alpha. \end{aligned} \qquad (5)$$

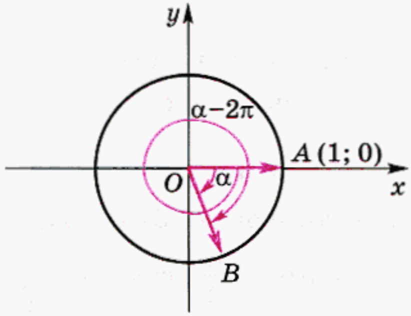


Рис. 89

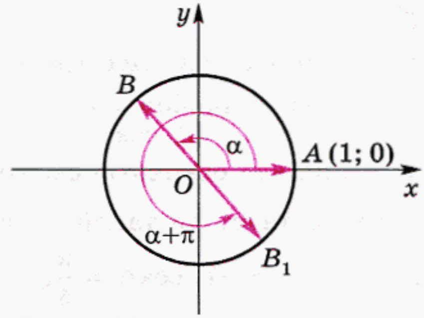


Рис. 90

Доказательство. Углам α и $\alpha + 2\pi k$ соответствует одна и та же точка B (на рисунке 89 $k = -1$) единичной окружности. Поэтому справедливы равенства (5).

Теорема 3 доказана.

ПРИМЕР 3.

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1;$ б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 10\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0;$

в) $\cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos(-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2};$

г) $\sin 660° = \sin(720° - 60°) = \sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Равенства (1), (4) и (5) являются основными формулами для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

В дальнейшем нам понадобятся еще следующие формулы:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha. \qquad (6)$$

Покажем, что эти равенства справедливы для любого угла α.

Действительно, точка B, соответствующая углу α, и точка B_1, соответствующая углу $\alpha + \pi$, симметричны относительно начала координат (рис. 90). Поэтому и абсциссы и ординаты этих точек — противоположные числа. Следовательно, справедливы равенства (6).

ПРИМЕР 4.

а) $\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

б) $\cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

в) $\sin 240° = \sin(180° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

г) $\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$

7.48 Запишите основное тригонометрическое тождество.

7.49° Назовите наибольшее и наименьшее значения:
а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$.

7.50 Запишите основные формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Существует ли такой угол α, для которого **(7.51—7.52)**:

7.51 а) $\sin\alpha = -1$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
в) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; г) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$; $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$?

7.52 а) $\sin\alpha = -\sqrt{3}$; б) $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1$; в) $\sin\alpha = \frac{\pi}{2}$;
г) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{11}}{3}$; д) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$; е) $\cos\alpha = -\frac{\pi}{3}$?

7.53 Может ли косинус угла быть равным:
а) $-\frac{21}{37}$; б) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$; в) $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}$; г) $\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{6}}$?

7.54 Вычислите $\sin\alpha$, если:
а) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

7.55 Вычислите $\cos\alpha$, если:
а) $\sin\alpha = 0{,}8$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; б) $\sin\alpha = -0{,}6$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Упростите выражение **(7.56—7.59)**:

7.56 а) $1 - \sin^2\alpha$; б) $1 - \cos^2\alpha$; в) $\sin^2\alpha - 1$; г) $\cos^2\alpha - 1$.

7.57 а) $(1 + \sin\alpha)(1 - \sin\alpha)$; б) $(\cos\alpha - 1)(1 + \cos\alpha)$;
в) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1$; г) $1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

7.58 а) $\frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$; б) $\frac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha}$;
в) $\frac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha}$; г) $\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha - 1}$,
где угол α такой, что знаменатель не обращается в нуль.

7.59 а) $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;
б) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$;
в) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;
г) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

7.60 Если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha = 1 + k$, то какие значения может принимать k? Определите $\cos\alpha$.

7.61 Вычислите:

а) $-6\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 5\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\frac{7\pi}{6}$;

б) $3\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 4\cos\left(-\frac{11\pi}{2}\right) + 5\sin 7\pi + \cos(-11\pi)$.

7.62 Определите знак произведения:

а) $\sin 157° \cdot \sin 275° \cdot \sin(-401°) \cdot \sin 910° \cdot \sin 328°$;

б) $\cos 73° \cdot \cos 140° \cdot \cos 236° \cdot \cos 301° \cdot \cos(-384°) \cdot \cos 1000°$.

7.63 Найдите все углы α из интервала $(0;\ 2\pi)$, для каждого из которых справедливо равенство:

а) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$; б) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$.

7.64 Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sin(-55°)$, $\sin 600°$, $\sin 1295°$;

б) $\cos 653°$, $\cos(-68°)$, $\cos 295°$.

Сравните **(7.65—7.67)**:

7.65 а) $\sin 91°$ и $\sin 92°$; б) $\sin 195°$ и $\sin 200°$;
в) $\sin 354°$ и $\sin 959°$; г) $\sin 734°$ и $\sin(-1066°)$.

7.66 а) $\cos 101°$ и $\cos 157°$; б) $\cos 190°$ и $\cos 200°$;
в) $\cos 1000°$ и $\cos 2000°$; г) $\cos 860°$ и $\cos 510°$.

7.67 а) $\cos 1{,}6\pi$ и $\cos 1{,}68\pi$; б) $\sin 4{,}5$ и 0;
в) $\cos 5{,}1\pi$ и $\cos 5\pi$; г) $\sin 1$ и $\cos 1$.

7.68 Докажите справедливость равенства:

а) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; б) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$;
в) $\sin(3\pi - \alpha) = \sin\alpha$; г) $\cos(5\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

7.69 Упростите выражение:

а) $\sin(-\alpha + \pi)$; б) $\cos(\pi - \alpha)$;
в) $\sin(\alpha + 7\pi)$; г) $\cos(\alpha - 9\pi)$.

7.70 Вычислите:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 3\pi\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 8\pi\right)$; в) $\sin\left(9\frac{5}{6}\pi\right)$.

Отметьте точки единичной окружности, соответствующие углам α, для каждого из которых выполняется равенство, и задайте эти углы формулами **(7.71—7.72)**:

7.71 а) $\sin\alpha = 1$; б) $\sin\alpha = -1$; в) $\sin\alpha = 0$;
г) $\cos\alpha = 1$; д) $\cos\alpha = -1$; е) $\cos\alpha = 0$.

7.72 а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$; д) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; з) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; и) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

к) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; л) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; м) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.73 Постройте угол α из промежутка $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, синус которого равен:

а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{3}$; е) $-\frac{2}{3}$.

7.74 Постройте угол α из промежутка $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, косинус которого равен:

а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $-\frac{1}{3}$; е) $\frac{2}{3}$.

7.5. Арксинус

Рассмотрим на координатной плоскости xOy единичную окружность. Если число a таково, что $|a| \leqslant 1$, то прямая $y = a$ пересекает правую полуокружность единичной окружности в единственной точке B. При этом вектор $\overrightarrow{OB}$ образует с вектором $\overrightarrow{OA}$ единственный угол α[1] из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a (рис. 91). Этот угол обозначают $\arcsin a$ (читают: «арксинус a»).

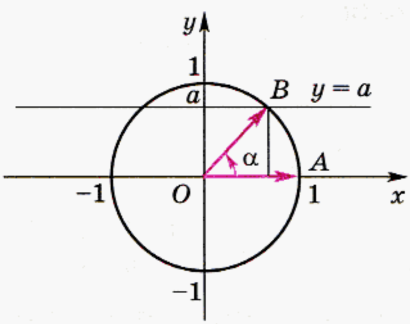


Рис. 91

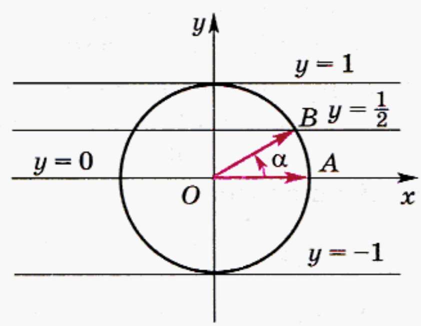


Рис. 92

[1] Напомним, что запись «угол α» есть краткая запись слов «угол, радианная мера которого равна α радиан».

Слово «арксинус» происходит от греческого слова $\alpha\rho\chi$ — дуга. Имеется в виду дуга окружности, на которую опирается соответствующий центральный угол.

ПРИМЕР 1.

а) $\arcsin 0 = 0$; б) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; в) $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$;

г) $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ $\left(\text{на рисунке 92 } \alpha = \frac{\pi}{6}\right)$.

Арксинус числа a ($|a| \leqslant 1$) есть угол α из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a:

$$\sin \alpha = a.$$

Подчеркнем, что для любого числа a, такого, что:

1) $|a| \leqslant 1$, существует, и притом единственный, арксинус этого числа;

2) $|a| > 1$, арксинус этого числа не существует, поэтому запись $\arcsin a$ для такого a не имеет смысла.

Например, не имеют смысла записи $\arcsin 2$ и $\arcsin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, так как $2 > 1$ и $\left|-\frac{\pi}{2}\right| > 1$.

Из определения арксинуса следует, что если $|a| \leqslant 1$, то

$$\sin(\arcsin a) = a.$$

Рассмотрим несколько задач, при решении которых используется понятие арксинуса.

ЗАДАЧА 1. Для данного числа a, такого, что $|a| < 1$, найдем все углы α, для каждого из которых

$$\sin \alpha = a. \qquad (1)$$

Рассмотрим единичную окружность (рис. 93). Так как $|a| < 1$, то прямая $y = a$ пересекает окружность в двух точках B_1 и B_2. При этом вектор $\overrightarrow{OB_1}$ образует с вектором $\overrightarrow{OA}$ угол $\alpha_0 = \arcsin \alpha$, а вектор $\overrightarrow{OB_2}$ образует с вектором $\overrightarrow{OA}$ угол $\beta_0 = \pi - \alpha_0 = \pi - \arcsin \alpha$.

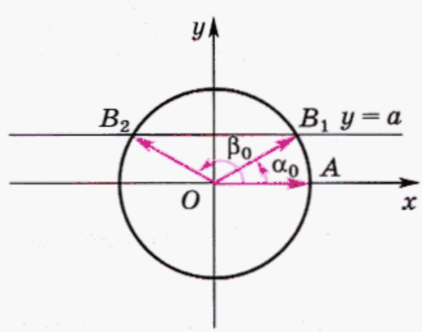


Рис. 93

Из определения синуса угла следует, что $\sin \alpha_0 = a$. Очевидно, что все углы, отличающиеся от α_0 на любое целое число полных оборотов, т. е. углы $\alpha = \alpha_0 + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, удовлетворяют условию (1). Из определения синуса угла следует, что $\sin \beta_0 = a$. Точно так же все углы, отличающиеся от β_0 на любое целое число полных оборотов, т. е. углы $\alpha = \beta_0 + 2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, также удовлетворяют условию (1). Легко видеть, что нет других углов α, удовлетворяющих условию (1).

Ответ. $\alpha = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ \alpha = \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

ПРИМЕР 2. а) Найдем все углы α, для каждого из которых $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

Все такие углы задаются формулами

$\alpha = \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ \alpha = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

б) Найдем все углы α, для каждого из которых $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

Все такие углы задаются формулами

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ \alpha = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (2)$$

Так как $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, а $\pi - \arcsin\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, то формулы (2) можно записать так:

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \quad \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

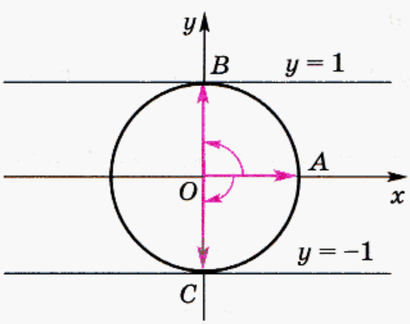


Рис. 94

ЗАДАЧА 2. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\sin\alpha = 1. \qquad (3)$$

Рассмотрим единичную окружность. Прямая $y = 1$ пересекает ее в единственной точке B (рис. 94). При этом вектор $\overrightarrow{OB}$ образует с вектором $\overrightarrow{OA}$ угол $\frac{\pi}{2}$. Условию (3) удовлетворяют лишь углы $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

ЗАДАЧА 3. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\sin\alpha = -1. \qquad (4)$$

Рассмотрим единичную окружность. Прямая $y = -1$ пересекает ее в единственной точке C (см. рис. 94). При этом вектор $\overrightarrow{OC}$ образует с вектором $\overrightarrow{OA}$ угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Условию (4) удовлетворяют лишь углы $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

ЗАДАЧА 4. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\sin\alpha = a\ (|a| > 1). \tag{5}$$

Так как $|a| > 1$, то углов α, удовлетворяющих равенству (5), не существует.

Ответ. Таких углов не существует.

7.75 Назовите угол из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен:

а) 1; б) -1; в) 0; г) $\frac{1}{2}$; д) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.76° Что называют арксинусом числа a? Для каких чисел a существует $\arcsin a$, для каких нет?

7.77 Имеет ли смысл запись:

а) $\arcsin\frac{\pi}{2}$; б) $\arcsin\frac{\pi}{3}$; в) $\arcsin\frac{\pi}{4}$;

г) $\arcsin\pi$; д) $\arcsin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; е) $\arcsin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

ж) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$; з) $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{2}$; и) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$?

Вычислите (**7.78—7.79**):

7.78 а) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$; б) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

в) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; г) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

д) $\sin(\arcsin 0{,}3)$; е) $\sin(\arcsin(-0{,}3))$.

7.79 а) $\arcsin 1$; б) $\arcsin(-1)$; в) $\arcsin 0$;

г) $\arcsin\frac{1}{2}$; д) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; з) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; и) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7.80 Сравните с нулем:

а) $\arcsin\frac{1}{3}$; б) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$; в) $\arcsin 0{,}2$;

г) $\arcsin 0{,}9$; д) $\arcsin(-0{,}2)$; е) $\arcsin(-0{,}9)$.

7.81 С помощью арксинуса выразите все углы из промежутка $[0; \pi]$, соответствующие отмеченным точкам на единичной окружности (рис. 95, *а—в*).

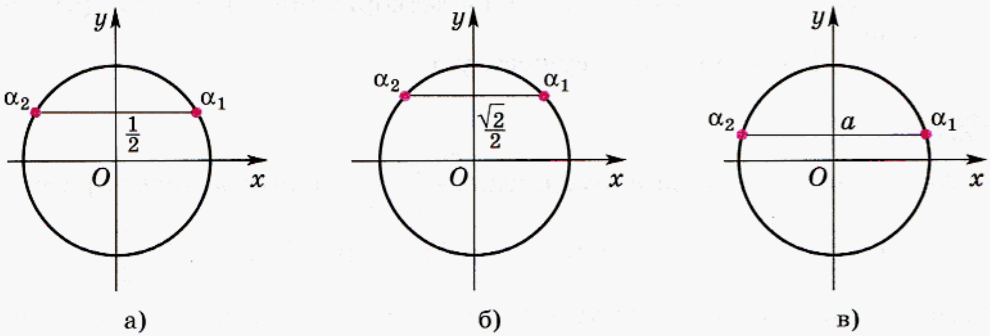


Рис. 95

7.82 Постройте углы:

а) $\arcsin\frac{1}{3}$, $\pi - \arcsin\frac{1}{3}$; б) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$, $\pi - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$;

в) $\arcsin\frac{1}{4}$, $\pi - \arcsin\frac{1}{4}$; г) $\arcsin\frac{4}{5}$, $\pi - \arcsin\frac{4}{5}$;

д) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$, $\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$;

е) $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$, $\pi - \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$.

7.83 Задайте формулами все углы α, для каждого из которых:

а) $\sin\alpha = 1$; б) $\sin\alpha = -1$; в) $\sin\alpha = 0$;

г) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; д) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$; з) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; и) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

к) $\sin\alpha = \frac{5}{6}$; л) $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$; м) $\sin\alpha = \frac{1}{6}$.

7.6. Арккосинус

Рассмотрим на координатной плоскости xOy единичную окружность. Если число a таково, что $|a| \leqslant 1$, то прямая $x = a$ пересекает ее верхнюю полуокружность в единственной точке B. При этом вектор $\overrightarrow{OB}$ образует с вектором $\overrightarrow{OA}$ единственный угол α из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a (рис. 96). Этот угол обозначают $\arccos a$ (читают: «арккосинус a»).

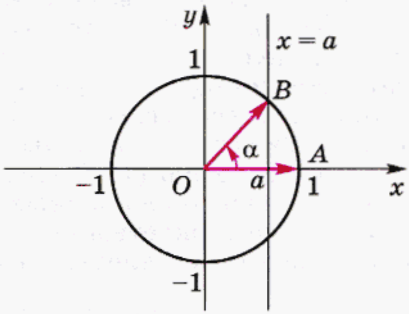


Рис. 96

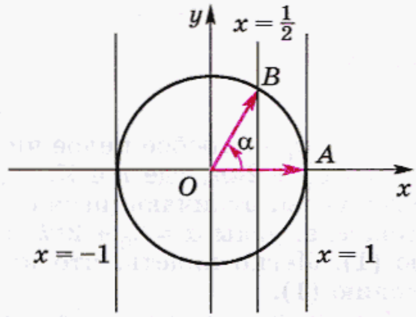


Рис. 97

ПРИМЕР 1.

а) $\arccos 1 = 0$; б) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; в) $\arccos(-1) = \pi$;

г) $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ $\left(\text{на рисунке 97 } \alpha = \frac{\pi}{3}\right)$.

Арккосинус числа a ($|a| \leqslant 1$) есть угол α из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a:

$$\cos \alpha = a.$$

Подчеркнем, что для любого числа a, такого, что:

1) $|a| \leqslant 1$, существует, и притом единственный, арккосинус этого числа;

2) $|a| > 1$, арккосинус этого числа не существует, поэтому запись $\arccos a$ для такого a не имеет смысла.

Например, не имеют смысла записи $\arccos \pi$ и $\arccos(-4)$, так как $\pi > 1$ и $-4 < -1$.

Из определения арккосинуса следует, что если $|a| \leqslant 1$, то

$$\cos(\arccos a) = a.$$

Рассмотрим несколько задач, при решении которых используется понятие арккосинуса.

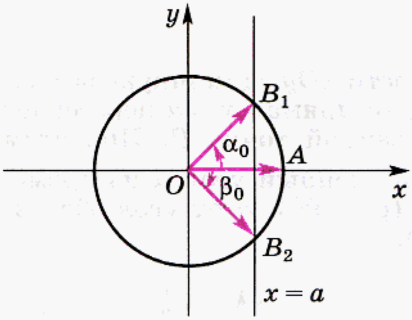


Рис. 98

ЗАДАЧА 1. Для данного числа a, такого, что $|a| < 1$, найдем все углы α, для каждого из которых

$$\cos\alpha = a. \tag{1}$$

Рассмотрим единичную окружность (рис. 98). Так как $|a| < 1$, то прямая $x = a$ пересекает окружность в двух точках: B_1 и B_2. При этом векторы $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OB_2}$ образуют с вектором $\overrightarrow{OA}$ углы $\alpha_0 = \arccos a$ и $\beta_0 = -\arccos a$.

Из определения косинуса угла следует, что $\cos\alpha_0 = a$ и $\cos\beta_0 = a$. Очевидно, что все углы, отличающиеся от α_0 на любое целое число полных оборотов, т. е. углы, равные $\alpha = \alpha_0 + 2\pi n$, где $\pi \in \boldsymbol{Z}$, удовлетворяют условию (1). Точно так же все углы, отличающиеся от β_0 на любое целое число полных оборотов, т. е. углы $\alpha = \beta_0 + 2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, также удовлетворяют условию (1). Легко видеть, что нет других углов α, удовлетворяющих условию (1).

Ответ. $\alpha = \arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $\alpha = -\arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

ПРИМЕР 2.

а) Найдем все углы α, для каждого из которых $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.
Все такие углы задаются формулами

$$\alpha = \arccos\frac{1}{5} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ \alpha = -\arccos\frac{1}{5} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

б) Найдем все углы α, для каждого из которых $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Все такие углы задаются формулами

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \\ \alpha &= -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{aligned} \tag{2}$$

Так как $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, то формулы (2) можно записать так:

$$\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\quad \alpha = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

ЗАДАЧА 2. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\cos\alpha = 1. \tag{3}$$

Рассмотрим единичную окружность (рис. 99). Прямая $x = 1$ пересекает ее в точке B, совпадающей с точкой A. Поэтому угол α_0 между векторами $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ равен 0, т. е. $\alpha_0 = \arccos 1 = 0$.

Условию (3) удовлетворяют лишь углы $\alpha = 0 + 2\pi n = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\alpha = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

ЗАДАЧА 3. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\cos\alpha = -1. \qquad (4)$$

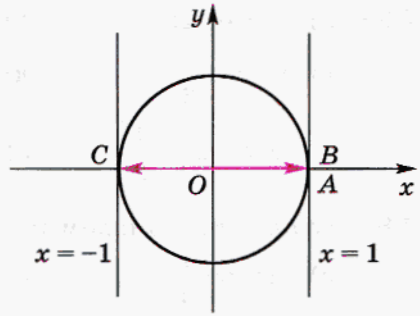


Рис. 99

Рассмотрим единичную окружность (см. рис. 99). Прямая $x = -1$ пересекает ее в точке C, поэтому угол α_0 между векторами $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OA}$ равен π, т. е. $\alpha_0 = \arccos(-1) = \pi$. Условию (4) удовлетворяют лишь углы $\alpha = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\alpha = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

ЗАДАЧА 4. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\cos\alpha = a \ (|a| > 1). \qquad (5)$$

Так как $|a| > 1$, то углов α, удовлетворяющих равенству (5), не существует.

Ответ. Таких углов не существует.

7.84° Назовите угол из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен:

а) 1; б) -1; в) 0; г) $\frac{1}{2}$; д) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.85° Что называют арккосинусом числа a? Для каких a существует $\arccos a$, для каких нет?

7.86 Имеет ли смысл запись:

а) $\arccos\frac{\pi}{2}$; б) $\arccos\frac{\pi}{3}$; в) $\arccos\frac{\pi}{4}$;

г) $\arccos\pi$; д) $\arccos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; е) $\arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

ж) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$; з) $\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$; и) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{17}}{4}\right)$?

Вычислите (**7.87—7.88**):

7.87 а) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; б) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

в) $\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; г) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

д) $\cos(\arccos 0{,}7)$; е) $\cos(\arccos(-0{,}7))$.

7.88 а) $\arccos 1$; б) $\arccos(-1)$; в) $\arccos 0$;

г) $\arccos \frac{1}{2}$; д) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; з) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; и) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7.89 Сравните с числом $0{,}5\pi$:

а) $\arccos \frac{1}{4}$; б) $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$; в) $\arccos \frac{1}{7}$;

г) $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$; д) $\arccos 1$; е) $\arccos(-1)$.

7.90 С помощью арккосинуса выразите углы из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, соответствующие отмеченным точкам на единичной окружности (рис. 100, *а—в*).

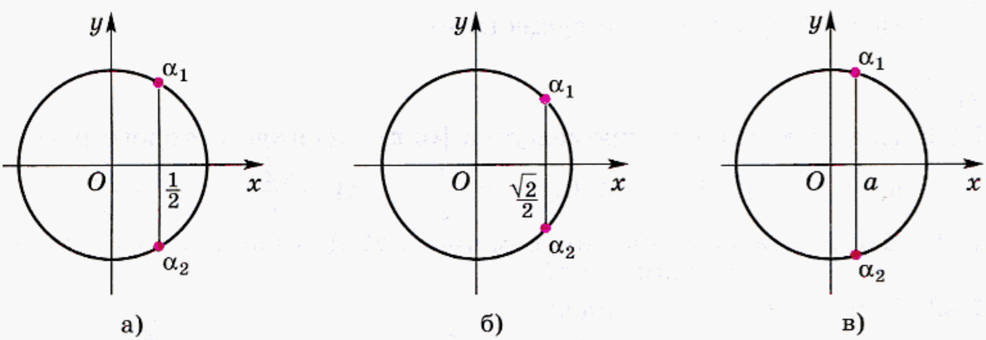


Рис. 100

Постройте углы **(7.91—7.92)**:

7.91 а) $\arccos \frac{1}{3}$, $-\arccos \frac{1}{3}$; б) $\arccos \frac{1}{4}$, $-\arccos \frac{1}{4}$;

в) $\arccos \frac{4}{5}$, $-\arccos \frac{4}{5}$; г) $\arccos \frac{3}{4}$, $-\arccos \frac{3}{4}$.

7.92 а) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, $-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$; б) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, $-\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$;

в) $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$, $-\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$; г) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$, $-\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$.

7.93 Задайте формулами все углы α, для каждого из которых:

а) $\cos\alpha = 1$; б) $\cos\alpha = -1$; в) $\cos\alpha = 0$;

г) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; д) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; з) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; и) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

к) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$; л) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$; м) $\cos\alpha = \frac{1}{6}$.

7.7*. Примеры использования арксинуса и арккосинуса

Рассмотрим несколько задач, при решении которых используется арксинус или арккосинус.

ЗАДАЧА 1. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\sin\alpha > \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Рассмотрим на координатной плоскости xOy единичную окружность. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает ее в точках B_1 и B_2, соответствующих углам $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$ и $\beta_0 = \frac{5\pi}{6}$ (рис. 101). При этом $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

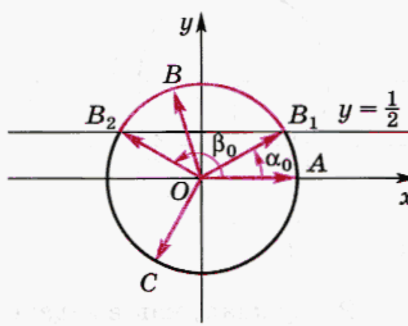


Рис. 101

Пусть α — любой угол из промежутка

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{6}. \qquad (2)$$

Углу α соответствует точка B единичной окружности. Очевидно, что точка B лежит выше прямой $y = \frac{1}{2}$, поэтому ее ордината больше чем $\frac{1}{2}$. Это означает, что $\sin\alpha > \frac{1}{2}$ для любого угла α из промежутка (2).

Пусть точка C соответствует углу α из промежутка

$$\frac{5\pi}{6} < \alpha < 2\pi + \frac{\pi}{6}, \qquad (3)$$

тогда точка C лежит ниже прямой $y = \frac{1}{2}$. Это означает, что $\sin\alpha < \frac{1}{2}$ для любого угла α из промежутка (3).

Из сказанного выше следует, что на промежутке длиной 2π от $\frac{\pi}{6}$ до $2\pi + \frac{\pi}{6}$ неравенству (1) удовлетворяют лишь углы α из промежутка (2) и, кроме них, на промежутке от $\frac{\pi}{6}$ до $2\pi + \frac{\pi}{6}$ нет других углов, удовлетворяющих неравенству (1).

Очевидно, что если неравенству (1) удовлетворяет некоторый угол α из промежутка (2), то этому неравенству удовлетворяет и любой угол, отличающийся от α на $2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Это означает, что неравенству (1) удовлетворяют лишь углы α из бесконечного множества промежутков $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < \alpha < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (1).

Ответ. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < \alpha < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

ЗАДАЧА 2. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\sin\alpha < -\frac{2}{3}. \qquad (4)$$

Рассмотрим на координатной плоскости xOy единичную окружность. Прямая $y = -\frac{2}{3}$ пересекает ее в точках B_1 и B_2, соответствующих углам $\alpha_0 = \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\beta_0 = \pi - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ (рис. 102).

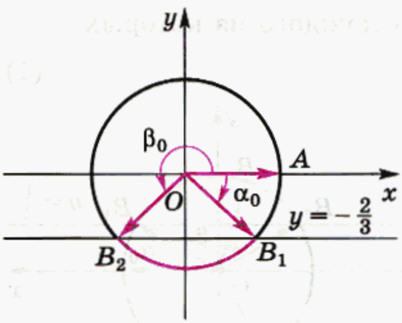


Рис. 102

Рассуждая, как в задаче 1, получим, что на промежутке длиной 2π от α_0 до $2\pi + \alpha_0$ неравенству (4) удовлетворяет любой угол α из промежутка

$$\beta_0 < \alpha < 2\pi + \alpha_0 \qquad (5)$$

и, кроме них, на промежутке от α_0 до $2\pi + \alpha_0$ нет других углов, удовлетворяющих неравенству (4).

Очевидно, что если неравенству (4) удовлетворяет некоторый угол α из промежутка (5), то этому неравенству удовлетворяет и любой угол, отличающийся от α на $2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Это означает, что неравенству (4) удовлетворяют лишь углы α из бесконечного множества промежутков $\beta_0 + 2\pi n < \alpha < 2\pi + \alpha_0 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (4).

Ответ. $\pi - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n < \alpha < 2\pi + \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

ЗАДАЧА 3. Для данного числа a, такого, что $|a| < 1$, найдем все углы α, для каждого из которых:

$$\text{а) } \sin\alpha > a; \qquad (6)$$

$$\text{б) } \sin\alpha < a. \qquad (7)$$

Рассмотрим на координатной плоскости xOy единичную окружность. Прямая $y = a$ пересекает ее в точках B_1 и B_2, соответствующих углам $\alpha_0 = \arcsin a$ и $\beta_0 = \pi - \arcsin a$ (на рисунке 103 $0 < a < 1$).

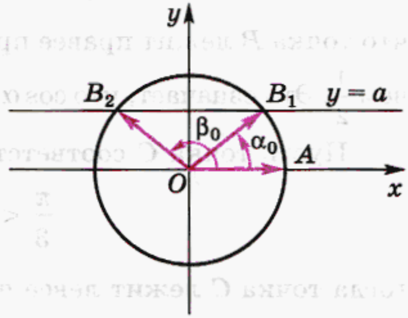


Рис. 103

Рассуждая, как в задачах 1 и 2, получим:

а) Неравенству (6) удовлетворяют лишь углы α из бесконечного множества промежутков

$$\alpha_0 + 2\pi n < \alpha < \beta_0 + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z},$$

и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (6).

б) Неравенству (7) удовлетворяют лишь углы α из бесконечного множества промежутков

$$\beta_0 + 2\pi n < \alpha < 2\pi + \alpha_0 + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z},$$

и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (6).

Ответ. а) $\arcsin a + 2\pi n < \alpha < \pi - \arcsin a + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\pi - \arcsin a + 2\pi n < \alpha < 2\pi + \arcsin a + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$.

Заметим, что ответы задачи 3 включают ответы задачи 1 $\left(\text{в случае а) при } a = \frac{1}{2}\right)$ и задачи 2 $\left(\text{в случае б) при } a = -\frac{2}{3}\right)$.

ЗАДАЧА 4. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\cos\alpha > \frac{1}{2}. \qquad (8)$$

Рассмотрим на координатной плоскости xOy единичную окружность. Прямая $x = \frac{1}{2}$ пересекает ее в точках B_1 и B_2, соответствующих углам $\alpha_0 = \frac{\pi}{3}$ и $\beta_0 = -\frac{\pi}{3}$ (рис. 104). При этом $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

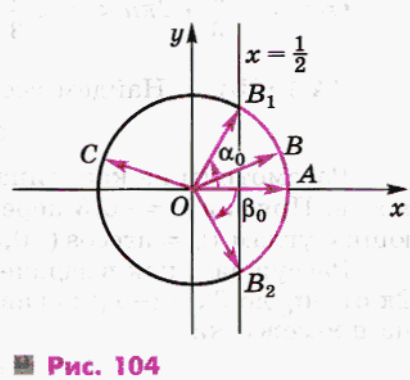


Рис. 104

Пусть α — любой угол из промежутка

$$-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{3}. \tag{9}$$

Углу α соответствует точка B единичной окружности. Очевидно, что точка B лежит правее прямой $x = \frac{1}{2}$, поэтому ее абсцисса больше чем $\frac{1}{2}$. Это означает, что $\cos\alpha > \frac{1}{2}$ для любого угла α из промежутка (9).

Пусть точка C соответствует углу α из промежутка

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < 2\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right), \tag{10}$$

тогда точка C лежит левее прямой $x = \frac{1}{2}$, поэтому ее абсцисса меньше чем $\frac{1}{2}$. Это означает, что $\cos\alpha < \frac{1}{2}$ для любого угла α из промежутка (10).

Из сказанного выше следует, что на промежутке длиной 2π от $-\frac{\pi}{3}$ до $2\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right)$ неравенству (8) удовлетворяют лишь углы α из промежутка (9) и, кроме них, на промежутке от $-\frac{\pi}{3}$ до $2\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right)$ нет других углов, удовлетворяющих неравенству (8).

Очевидно, что если неравенству (8) удовлетворяет некоторый угол α из промежутка (9), то этому неравенству удовлетворяет и любой угол, отличающийся от α на $2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Это означает, что неравенству (8) удовлетворяют лишь углы α из бесконечного множества промежутков $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < \alpha < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (8).

Ответ. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < \alpha < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

ЗАДАЧА 5. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\cos\alpha < -0{,}3. \tag{11}$$

Рассмотрим на координатной плоскости xOy единичную окружность. Прямая $x = -0{,}3$ пересекает ее в точках B_1 и B_2, соответствующих углам $\alpha_0 = \arccos(-0{,}3)$ и $\beta_0 = -\alpha_0 = -\arccos(-0{,}3)$ (рис. 105).

Рассуждая, как в задаче 4, получим, что на промежутке длиной 2π от $-\alpha_0$ до $2\pi + (-\alpha_0)$ неравенству (11) удовлетворяет любой угол α из промежутка

$$\alpha_0 < \alpha < 2\pi - \alpha_0 \tag{12}$$

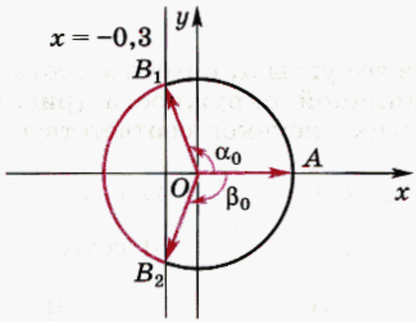


Рис. 105

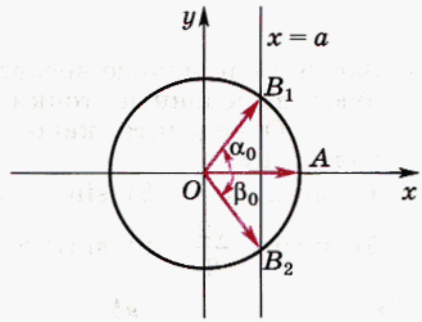


Рис. 106

и, кроме них, на промежутке от $-\alpha_0$ до $2\pi + (-\alpha_0)$ нет других углов, удовлетворяющих неравенству (11).

Очевидно, что если неравенству (11) удовлетворяет некоторый угол α из промежутка (12), то этому неравенству удовлетворяет и любой угол, отличающийся от α на $2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Это означает, что неравенству (11) удовлетворяют лишь углы α из бесконечного множества промежутков $\alpha_0 + 2\pi n < \alpha < 2\pi - \alpha_0 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (11).

Ответ. $\arccos(-0{,}3) + 2\pi n < \alpha < 2\pi - \arccos(-0{,}3) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

ЗАДАЧА 6. Для данного числа a, такого, что $|a| < 1$, найдем все углы α, для каждого из которых:

$$\text{а) } \cos\alpha > a; \tag{13}$$

$$\text{б) } \cos\alpha < a. \tag{14}$$

Рассмотрим на координатной плоскости xOy единичную окружность. Прямая $x = a$ пересекает ее в точках B_1 и B_2, соответствующих углам $\alpha_0 = \arccos a$ и $\beta_0 = -\alpha_0 = -\arccos a$ (рис. 106).

Рассуждая, как в задачах 4 и 5, получим:

а) Неравенству (13) удовлетворяют лишь углы α из бесконечного множества промежутков

$$-\alpha_0 + 2\pi n < \alpha < \alpha_0 + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (13).

б) Неравенству (14) удовлетворяют лишь углы α из бесконечного множества промежутков

$$\alpha_0 + 2\pi n < \alpha < 2\pi - \alpha_0 + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (14).

Ответ. а) $-\arccos a + 2\pi n < \alpha < \arccos a + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\arccos a + 2\pi n < \alpha < 2\pi - \arccos a + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Заметим, что ответы задачи 6 включают ответы задачи 4 $\left(\text{в случае а) при } a = \frac{1}{2}\right)$ и задачи 5 (в случае б) при $a = -0{,}3$).

7.94 Задайте с помощью неравенств все углы α, которым соответствуют выделенные точки единичной окружности (рис. 107, *а—з*). Определите, какой из этих рисунков соответствует неравенству:

1) $\sin\alpha > 0$; 2) $\sin\alpha < 0$; 3) $\cos\alpha > 0$; 4) $\cos\alpha < 0$;

5) $\sin\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\sin\alpha > \frac{1}{2}$; 7) $\cos\alpha < \frac{1}{2}$; 8) $\cos\alpha > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

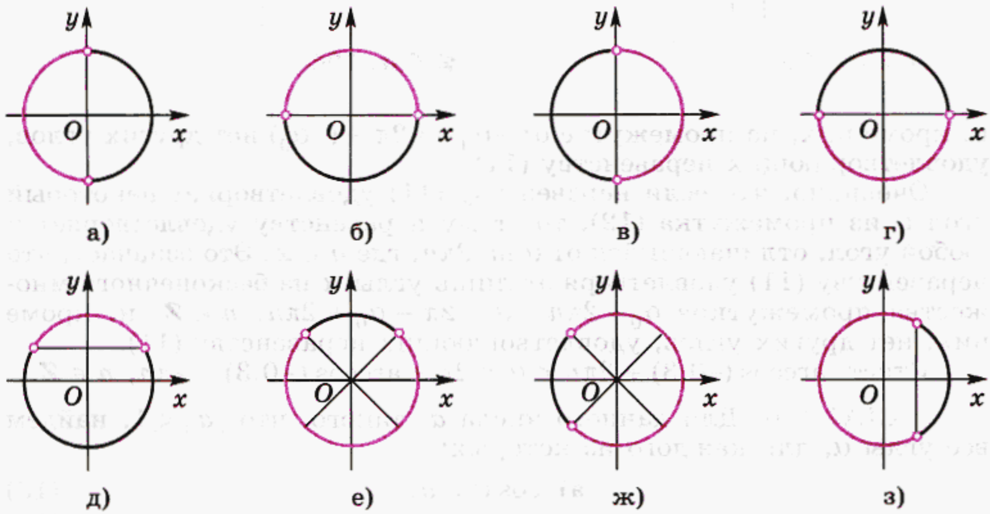


Рис. 107

Найдите все такие углы α, для каждого из которых (7.95—7.98):

7.95 а) $\sin\alpha > \frac{1}{2}$; б) $\sin\alpha < \frac{1}{2}$; в) $\sin\alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\sin\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\sin\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\sin\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $\sin\alpha > -\frac{1}{2}$; з) $\sin\alpha < -\frac{1}{2}$; и) $\sin\alpha > -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

к) $\sin\alpha < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; л) $\sin\alpha > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; м) $\sin\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.96 а) $\cos\alpha > \frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha < \frac{1}{2}$; в) $\cos\alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\cos\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\cos\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\cos\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $\cos\alpha > -\frac{1}{2}$; з) $\cos\alpha < -\frac{1}{2}$; и) $\cos\alpha > -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

к) $\cos\alpha < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; л) $\cos\alpha > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; м) $\cos\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.97 а) $\sin\alpha > \frac{1}{4}$; б) $\sin\alpha < \frac{1}{4}$; в) $\sin\alpha > -\frac{2}{5}$;

г) $\sin\alpha < -\frac{2}{5}$; д) $\cos\alpha > 0{,}2$; е) $\cos\alpha < 0{,}2$;

ж) $\cos\alpha > -0{,}8$; з) $\cos\alpha < -0{,}8$.

7.98 а) $\sin\alpha < 1$; б) $\sin\alpha > -1$; в) $\cos\alpha < 1$; г) $\cos\alpha > -1$;
д) $\sin\alpha > 1$; е) $\sin\alpha < -1{,}1$; ж) $\cos\alpha > 2$; з) $\cos\alpha < -1{,}5$.

7.8*. Формулы для арксинуса и арккосинуса

Для любого числа a, такого, что $|a| \leqslant 1$, справедливо равенство

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a. \qquad (1)$$

Действительно, пусть $\alpha = \arcsin a$, тогда $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\alpha = a$. Так как по свойству синуса угла $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, то $\sin(-\alpha) = -a$.

Так как $|-a| = |a| \leqslant 1$ и $-\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то по определению арксинуса числа имеем $-\alpha = \arcsin(-a)$.

Следовательно, $\arcsin(-a) = -\arcsin a$, т. е. справедливо равенство (1).

Для любого числа a, такого, что $|a| \leqslant 1$, справедливо равенство

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a. \qquad (2)$$

Действительно, пусть $\alpha = \arccos a$, тогда $\alpha \in [0; \pi]$ и $\cos\alpha = a$. Так как по свойству косинуса угла $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, то $\cos(\pi - \alpha) = -a$.

Так как $|-a| = |a| \leqslant 1$ и $\pi - \alpha \in [0; \pi]$, то по определению арккосинуса числа имеем $\arccos(-a) = \pi - \alpha$.

Следовательно, $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$, т. е. справедливо равенство (2).

ПРИМЕР 1.

а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$;

б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$;

в) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$;

г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Для любого угла $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ справедливо равенство

$$\arcsin(\sin\alpha) = \alpha. \qquad (3)$$

Равенство (3) следует из определения арксинуса числа.

ПРИМЕР 2. Вычислим $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Так как $-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$.

ПРИМЕР 3. Вычислим $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right)$.

Поскольку $\frac{13\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то нельзя сразу применить формулу (3). Но так как $\sin\frac{13\pi}{6} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Для любого угла $\alpha \in [0; \pi]$ справедливо равенство

$$\arccos(\cos\alpha) = \alpha. \qquad (4)$$

Равенство (4) следует из определения арккосинуса числа.

ПРИМЕР 4. Вычислим $\arccos(\cos\sqrt{\pi})$.

Так как $\sqrt{\pi} \in [0; \pi]$, то $\arccos(\cos\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}$.

ПРИМЕР 5. Вычислим $\arccos(\cos(-6))$.

Так как $-6 \notin [0; \pi]$, то нельзя сразу применить формулу (4). Но так как $\cos(-6) = \cos(2\pi - 6)$, то $\arccos(\cos(-6)) = \arccos(\cos(2\pi - 6))$.

Так как $2\pi - 6 \in [0; \pi]$, то $\arccos(\cos(2\pi - 6)) = 2\pi - 6$.

Следовательно, $\arccos(\cos(-6)) = 2\pi - 6$.

7.99 Запишите формулы для арксинуса и арккосинуса.

7.100 Выразите через арксинус положительного числа:

а) $\arcsin(-0{,}1)$; б) $\arcsin(-0{,}2)$; в) $\arcsin(-0{,}9)$;

г) $\arcsin(3-\pi)$; д) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$; е) $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$.

7.101 Выразите через арккосинус положительного числа:

а) $\arccos(-0{,}1)$; б) $\arccos(-0{,}2)$; в) $\arccos(-0{,}9)$;

г) $\arccos(3-\pi)$; д) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$; е) $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$.

Вычислите (7.102—7.104):

7.102 а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; в) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; д) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; е) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7.103 а) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$;

в) $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; г) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

д) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; е) $\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right)$;

ж) $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$; з) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$;

и) $\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{4}\right)$.

7.104 а) $\arcsin(\sin 9)$; б) $\arccos(\cos 9)$; в) $\arcsin(\sin(-8))$;

г) $\arccos(\cos(-8))$; д) $\arcsin(\sin(-3))$; е) $\arccos(\cos(-3))$.

§ 8. Тангенс к котангенс угла

8.1. Определение тангенса и котангенса угла

Число, равное отношению $\sin\alpha$ к $\cos\alpha$, называют **тангенсом угла** α и обозначают $\operatorname{tg}\alpha$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Тангенс угла α определен для всех углов α, за исключением тех, для которых $\cos\alpha = 0$. Поэтому в определении $\operatorname{tg}\alpha$ исключаются все углы

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, \qquad (1)$$

где k — любое целое число.

Из определения следует, что для любого угла α, не совпадающего ни с одним из углов (1), тангенс этого угла существует, и притом единственный. Поэтому часто говорят, что $\operatorname{tg}\alpha$ есть функция угла α.

Число, равное отношению $\cos\alpha$ к $\sin\alpha$, называют котангенсом угла α и обозначают $\operatorname{ctg}\alpha$, т. е.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Котангенс угла α определен для всех углов α, за исключением тех, для которых $\sin\alpha = 0$. Поэтому в определении $\operatorname{ctg}\alpha$ исключаются все углы

$$\alpha = \pi k, \qquad (2)$$

где k — любое целое число.

Из определения следует, что для любого угла α, не совпадающего ни с одним из углов (2), котангенс этого угла существует, и притом единственный. Поэтому часто говорят, что $\operatorname{ctg}\alpha$ есть функция угла α.

ПРИМЕР.

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$;

в) $\operatorname{tg} 45° = \dfrac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1$; г) $\operatorname{ctg} 60° = \dfrac{\cos 60°}{\sin 60°} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Тангенс угла $\frac{\pi}{2}$ не существует, потому что $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, но существует котангенс угла $\frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Для угла 0°, наоборот, не существует котангенс, потому что $\sin 0° = 0$, но существует тангенс:

$$\operatorname{tg} 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = \frac{0}{1} = 0.$$

Пусть на координатной плоскости xOy дана единичная окружность и прямая $x = 1$, касающаяся этой окружности в точке A — конце единичного вектора оси Ox. На прямой $x = 1$ зададим координатную ось с тем же положительным направлением и таким же единичным отрезком, что и на оси Oy, и начальной точкой A (рис. 108). Назовем новую ось **осью тангенсов**.

Пусть дан угол α и пусть точка B единичной окружности — точка, соответствующая углу α. Прямая OB пересекает ось тангенсов в точке D. Докажем, что $\operatorname{tg}\alpha$ равен координате точки D на оси тангенсов.

Действительно, опустим из точки B перпендикуляр на ось Ox. Получим подобные треугольники OBC и ODA. Из подобия треугольников следует справедливость равенства $\frac{BC}{OC} = \frac{AD}{OA}$. Так как $OA = 1$, то из этого равенства следует справедливость равенства

$$AD = \frac{BC}{OC}.$$

Если точка B находится в первой четверти (см. рис. 108) или в третьей четверти (рис. 109), то в обоих случаях точка D находится выше оси Ox и ее координата на оси тангенсов равна AD. Но в первом случае $BC = \sin\alpha$, $OC = \cos\alpha$ и

$$AD = \frac{BC}{OC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha,$$

а во втором случае $BC = -\sin\alpha$, $OC = -\cos\alpha$ и

$$AD = \frac{BC}{OC} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

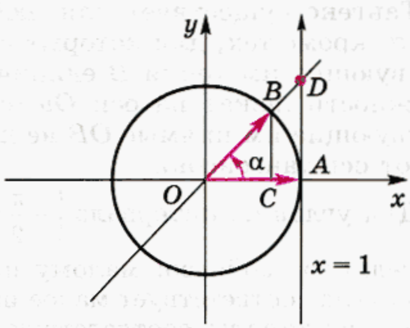


Рис. 108

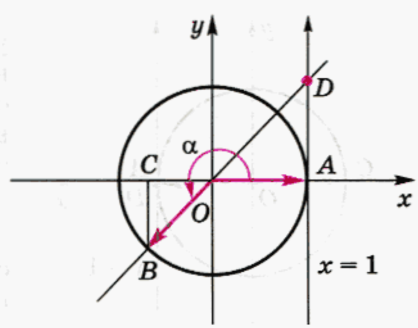


Рис. 109

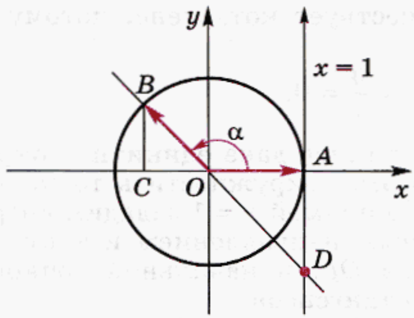


Рис. 110

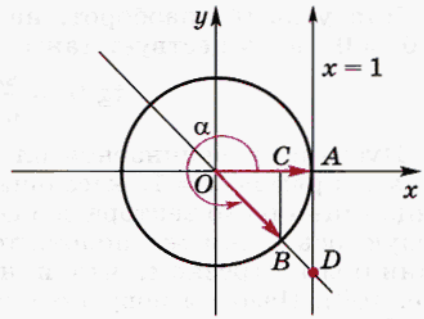


Рис. 111

Если же точка B находится во второй четверти (рис. 110) или в четвертой четверти (рис. 111), то в обоих случаях точка D находится ниже оси Ox и ее координата на оси тангенсов равна $-AD$. Но в первом случае $BC = \sin\alpha$, $OC = -\cos\alpha$ и

$$AD = \frac{BC}{OC} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

а во втором случае $BC = -\sin\alpha$, $OC = \cos\alpha$ и

$$AD = \frac{BC}{OC} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Наконец, при $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$ точка B совпадает с точкой $A\ (1;\ 0)$ или с точкой $C\ (-1;\ 0)$ (рис. 112), и в обоих случаях точка D совпадает с точкой A и ее координата на оси тангенсов равна нулю и равна $\operatorname{tg}\alpha$: $AD = 0 = \operatorname{tg}\alpha$.

Тем самым во всех случаях доказано, что $\operatorname{tg}\alpha$ равен координате точки D на оси тангенсов.

Из доказанного утверждения следует справедливость следующих свойств $\operatorname{tg}\alpha$:

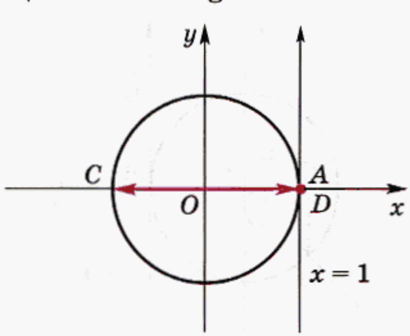


Рис. 112

Тангенс существует для любого угла α, кроме тех, для которых соответствующие им точки B единичной окружности лежат на оси Oy (соответствующие им прямые OB не пересекают ось тангенсов).

Для углов из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо свойство: малому изменению угла соответствует малое изменение координаты соответствующей точки оси тангенсов, т. е. малому изменению угла соответствует малое изменение тангенса (рис. 113).

Тангенс может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Для любых углов α_1 и α_2, таких, что $-\frac{\pi}{2}<\alpha_1<\alpha_2<\frac{\pi}{2}$, справедливо неравенство $\operatorname{tg}\alpha_1<\operatorname{tg}\alpha_2$ (см. рис. 113).

Последнее свойство означает, что функция $\operatorname{tg}\alpha$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ возрастает.

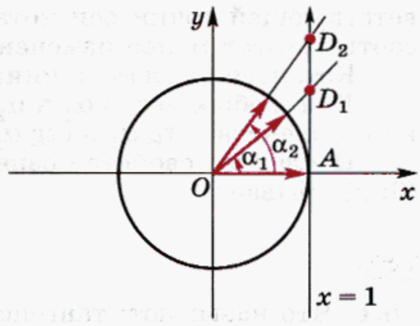


Рис. 113

Пусть теперь на координатной плоскости xOy даны единичная окружность и прямая $y=1$, касающаяся этой окружности в точке M — конце единичного вектора оси Oy. На прямой $y=1$ зададим координатную ось с тем же положительным направлением и таким же единичным отрезком, что и на оси Ox, и начальной точкой M (рис. 114). Назовем новую ось **осью котангенсов**.

Пусть дан угол α и пусть точка B единичной окружности — точка, соответствующая углу α. Прямая OB пересекает ось котангенсов в точке D (см. рис. 114). Можно доказать, что $\operatorname{ctg}\alpha$ равен координате точки D на оси котангенсов (доказательство аналогично доказательству подобного утверждения для тангенсов).

Из этого утверждения следует справедливость следующих свойств $\operatorname{ctg}\alpha$:

Котангенс существует для любого угла α, кроме тех, для которых соответствующие им точки B единичной окружности лежат на оси Ox (соответствующие им прямые OB не пересекают ось котангенсов).

Для углов из интервала $(0;\ \pi)$ справедливо свойство: малому изменению угла соответствует малое изменение координаты соот-

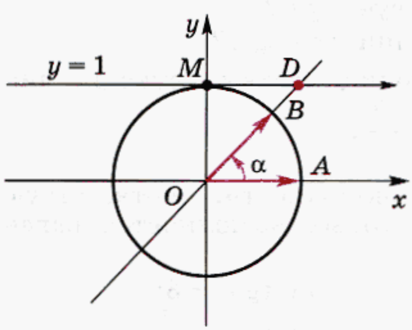


Рис. 114

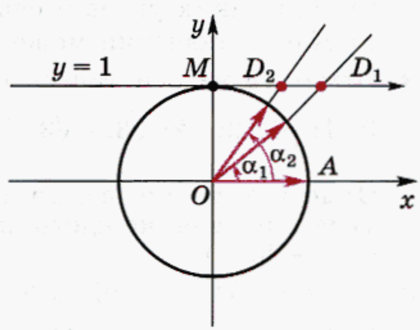


Рис. 115

ветствующей точки оси котангенсов, т. е. малому изменению угла соответствует малое изменение котангенса (рис. 115).

Котангенс может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Для любых углов α_1 и α_2, таких, что $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi$, справедливо неравенство $\operatorname{ctg} \alpha_1 > \operatorname{ctg} \alpha_2$ (см. рис. 115).

Последнее свойство означает, что функция $\operatorname{ctg} \alpha$ на интервале $(0; \pi)$ убывает.

8.1° Что называют: тангенсом угла α; котангенсом угла α?

8.2 Для каких углов α не существует: а) $\operatorname{tg} \alpha$; б) $\operatorname{ctg} \alpha$?

8.3 а) Если для угла α существует $\operatorname{tg} \alpha$, то единственный ли он?
б) Если для угла α существует $\operatorname{ctg} \alpha$, то единственный ли он?

Вычислите (8.4—8.6):

8.4 а) $\operatorname{tg} 0$; б) $\operatorname{tg} 30°$; в) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$; г) $\operatorname{tg} 60°$;
д) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$; е) $\operatorname{ctg} 45°$; ж) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$; з) $\operatorname{ctg} 90°$.

8.5 а) $\operatorname{tg} 0° + \operatorname{ctg} 45° - \operatorname{tg} 45° + \operatorname{ctg} 30°$;
б) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$.

8.6 а) $\operatorname{tg} 180°$; б) $\operatorname{tg} 2\pi$; в) $\operatorname{ctg} 270°$; г) $\operatorname{tg} (-\pi)$;
д) $\operatorname{ctg} (-45°)$; е) $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$; ж) $\operatorname{ctg} 135°$; з) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

8.7 Какие знаки имеют тангенс и котангенс угла α, если точка единичной окружности, соответствующая углу α, расположена: в I четверти; во II четверти; в III четверти; в IV четверти?

8.8° а) Объясните, как можно определить $\operatorname{tg} \alpha$ с помощью оси тангенсов.
б) Для каких углов α существует $\operatorname{tg} \alpha$?
в) Какие значения может принимать $\operatorname{tg} \alpha$?

8.9 Отметьте на оси тангенсов точки, соответствующие числам: $0; 1; -1; 2; -2; \sqrt{3}; -\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Отметьте точки единичной окружности, соответствующие углам α, для каждого из которых выполняется равенство (8.10—8.11):

8.10 а) $\operatorname{tg} \alpha = 1$; б) $\operatorname{tg} \alpha = 2$; в) $\operatorname{tg} \alpha = 3$;
г) $\operatorname{tg} \alpha = 4$; д) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$; е) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.

8.11 а) $\operatorname{tg}\alpha = -1$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -2$; в) $\operatorname{tg}\alpha = -3$;
г) $\operatorname{tg}\alpha = -4$; д) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$; е) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$.

8.12° а) Объясните, как можно определить $\operatorname{ctg}\alpha$ с помощью оси котангенсов.
б) Для каких углов α существует $\operatorname{ctg}\alpha$?
в) Какие значения может принимать $\operatorname{ctg}\alpha$?

8.13 Отметьте на оси котангенсов точки, соответствующие числам: 0; 1; -1; 2; -2; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Отметьте точки единичной окружности, соответствующие углам α, для каждого из которых выполняется равенство (8.14—8.15):

8.14 а) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$; в) $\operatorname{ctg}\alpha = 3$;
г) $\operatorname{ctg}\alpha = 4$; д) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$; е) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$.

8.15 а) $\operatorname{ctg}\alpha = -1$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = -2$; в) $\operatorname{ctg}\alpha = -3$;
г) $\operatorname{ctg}\alpha = -4$; д) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}$; е) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{3}$.

8.16 Сравните:
а) $\operatorname{tg} 60°$ и $\operatorname{tg} 30°$; б) $\operatorname{ctg} 60°$ и $\operatorname{ctg} 30°$; в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;
г) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$; д) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 2$; е) $\operatorname{tg} 2$ и $\operatorname{tg} 3$;
ж) $\operatorname{ctg} 1$ и $\operatorname{ctg} 2$; з) $\operatorname{ctg} 2$ и $\operatorname{ctg} 3$; и) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{ctg} 2$.

8.2. Основные формулы для $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$

Основными формулами для $\operatorname{tg}\alpha$ являются следующие формулы:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha, \tag{2}$$

где n — любое целое число.

Конечно, эти равенства верны только для таких углов α, для которых имеют смысл правые и левые части.

Для любых углов α, для которых существует $\operatorname{tg}\alpha$, т. е. для углов, отличных от углов $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число, имеет смысл и $\operatorname{tg}(-\alpha)$, и $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$.

Покажем справедливость равенств (1) и (2) для любого такого угла α. Используя формулы для $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, имеем

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Если n — четное число, т. е. $n = 2l$, где l — целое число, то

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}(\alpha + 2\pi l) = \frac{\sin(\alpha + 2\pi l)}{\cos(\alpha + 2\pi l)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Если n — нечетное число, т. е. $n = 2l + 1$, где $l \in \boldsymbol{Z}$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi + 2\pi l) = \frac{\sin(\alpha + \pi + 2\pi l)}{\cos(\alpha + \pi + 2\pi l)} = \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} =$$

$$= \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Итак, равенство (2) доказано для любого целого числа n.

ПРИМЕР 1.

а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1;$ б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3};$

в) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6} + \pi\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3};$

г) $\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$

Основными формулами для $\operatorname{ctg}\alpha$ являются следующие формулы:

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \tag{3}$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha, \tag{4}$$

где n — любое целое число.

Конечно, эти равенства верны только для таких углов α, для которых имеют смысл правые и левые их части.

Для любых углов α, для которых существует $\operatorname{ctg}\alpha$, т. е. для углов, отличных от углов $\alpha = \pi k$, где k — любое целое число, имеет смысл и $\operatorname{ctg}(-\alpha)$, и $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n)$. Доказательство справедливости равенств (3) и (4) для любого такого угла α аналогично доказательству равенств (1) и (2).

ПРИМЕР 2.

а) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1;$ б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3};$

в) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1;$

г) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4} + \pi\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1.$

Кроме основных формул, приведем еще несколько формул для тангенса и котангенса.

Из определения тангенса и котангенса угла α следует справедливость равенства

$$\mathbf{tg}\,\alpha \cdot \mathbf{ctg}\,\alpha = \mathbf{1} \qquad (5)$$

для всех углов α, для каждого из которых существует одновременно и $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Левая часть равенства (5) существует для всех углов, за исключением тех, для которых или $\sin\alpha = 0$, или $\cos\alpha = 0$, поэтому формула (5) справедлива для всех углов

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Докажем, что для всех углов $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, выполняется равенство

$$\mathbf{tg}^2\,\alpha + \mathbf{1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^2\,\alpha}.$$

Действительно, используя определение тангенса и основное тригонометрическое тождество, имеем

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Аналогично доказывается, что для всех углов $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, справедливо равенство

$$\mathbf{ctg}^2\,\alpha + \mathbf{1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin}^2\,\alpha}.$$

8.17 а) Назовите основные формулы для $\operatorname{tg}\alpha$; для $\operatorname{ctg}\alpha$. Для каких углов α они справедливы?

б) Для каких углов α справедливо равенство $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$?

Упростите выражение[1] (8.18—8.20):

8.18 а) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\pi) - \operatorname{tg}(\beta+2\pi)}{\operatorname{ctg}(-\beta) - \operatorname{ctg}(-\alpha)}$; б) $\dfrac{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha) + \operatorname{tg}(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\alpha+3\pi) - \operatorname{tg}(\alpha+2\pi)}$.

8.19 а) $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\sin(\alpha-\pi)\cos(\alpha-2\pi)}{\cos(2\pi-\alpha)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\operatorname{tg}(3\pi-\alpha)}$;

б) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\sin(\alpha-\pi)\cos(2\pi-\alpha)\operatorname{tg}(3\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\cos(\alpha-5\pi)\cos(2\pi+\alpha)\operatorname{tg}(-\alpha-\pi)}$.

[1] В заданиях 8.18—8.20 и 8.23—8.26 углы α и β таковы, что данные числовые выражения имеют смысл.

8.20 а) $\dfrac{1-\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\sin^4\alpha-2\sin^2\alpha+1}$; б) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}$.

8.21 Определите знак выражения:

а) $\operatorname{tg} 71^\circ \operatorname{tg} 139^\circ \operatorname{tg} 235^\circ \operatorname{tg} 304^\circ \operatorname{tg}(-393^\circ) \operatorname{tg} 1000^\circ$;

б) $\operatorname{ctg} 282^\circ \operatorname{ctg}(-401^\circ) \operatorname{ctg}(-910^\circ) \operatorname{ctg} 140^\circ \operatorname{ctg} 240^\circ$;

в) $\cos 1 \sin 3 \operatorname{tg} 4 \operatorname{ctg} 5 \operatorname{tg} 2 \operatorname{tg} 6$;

г) $\operatorname{tg} 1{,}5 \operatorname{ctg} 4{,}5 \operatorname{tg}(-3{,}1) \operatorname{ctg}(-3{,}1)$;

д) $\dfrac{\sin 6+\cos(-4)}{\operatorname{tg}(-2)\operatorname{ctg}(-4)}$; е) $\dfrac{\sin(-8)+\cos 9}{\cos 11 \operatorname{tg}(-9)}$.

8.22 Вычислите:

а) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ и $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$;

б) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$;

в) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ и $\cos\alpha=-0{,}6$;

г) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ и $\sin\alpha=-0{,}8$;

д) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha=2{,}4$;

е) $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha=-1$;

ж) $\sin\alpha$, если $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$ и $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{5}{12}$;

з) $\cos\alpha$, если $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ и $\operatorname{ctg}\alpha=1$.

Упростите выражение (8.23—8.25):

8.23 а) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; б) $\dfrac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$; в) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; г) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1$;

д) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; е) $1-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

ж) $\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$; з) $\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$.

8.24 а) $\sin\beta\operatorname{ctg}\beta$; б) $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{ctg}\alpha$;

в) $\sin\beta : \operatorname{tg}\beta$; г) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$;

д) $\cos^2\alpha\,(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$; е) $1-\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$;

ж) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; з) $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

8.25 а) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}$;

в) $\sin^2\beta+\operatorname{tg}^2\beta-\dfrac{1}{\cos^2\beta}$; г) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha$.

8.26 Докажите справедливость равенства:

а) $\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=2\,(1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha)$;

б) $\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=2\,(1+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)$.

8.27 Вычислите:

а) $\operatorname{tg}(-80°)+\operatorname{tg}(-70°)+\operatorname{tg}(-60°)+\ldots+\operatorname{tg}60°+\operatorname{tg}70°+\operatorname{tg}80°$;

б) $\operatorname{ctg}(-90°)+\operatorname{ctg}(-70°)+\operatorname{ctg}(-50°)+\ldots+\operatorname{ctg}50°+\operatorname{ctg}70°+\operatorname{ctg}90°$;

в) $\operatorname{tg}(-80°)\operatorname{tg}(-70°)\operatorname{tg}(-60°)\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}60°\operatorname{tg}70°\operatorname{tg}80°$;

г) $\operatorname{ctg}10°\operatorname{ctg}20°\operatorname{ctg}30°\cdot\ldots\cdot\operatorname{ctg}160°\operatorname{ctg}170°$.

Отметьте точки единичной окружности, соответствующие углам α, для каждого из которых выполняется равенство, и задайте эти углы формулой (8.28—8.29):

8.28 а) $\operatorname{tg}\alpha=0$; б) $\operatorname{tg}\alpha=1$;

в) $\operatorname{tg}\alpha=-1$; г) $\operatorname{ctg}\alpha=0$;

д) $\operatorname{ctg}\alpha=1$; е) $\operatorname{ctg}\alpha=-1$.

8.29 а) $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{3}$; е) $\operatorname{ctg}\alpha=-\sqrt{3}$;

ж) $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; з) $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

8.3. Арктангенс

Рассмотрим на координатной плоскости xOy единичную окружность и ось тангенсов. Для любого действительного числа a прямая $y=a$ пересекает ось тангенсов в единственной точке D (рис. 116).

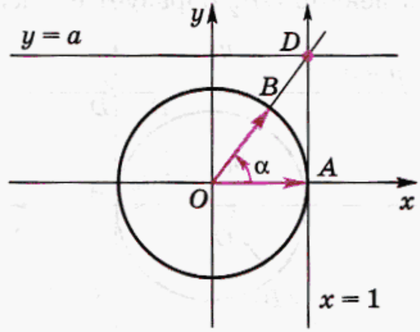


Рис. 116

Прямая OD пересекает правую полуокружность в единственной точке B. При этом вектор $\overrightarrow{OB}$ образует с вектором $\overrightarrow{OA}$ единственный угол α

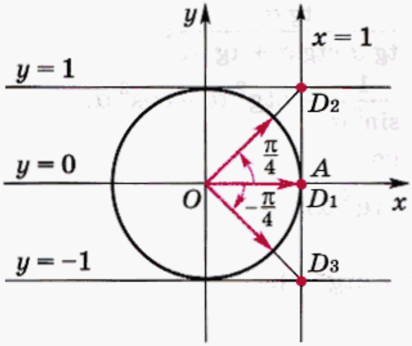


Рис. 117

из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a (см. рис. 116). Этот угол обозначают $\operatorname{arctg} a$ (читают: «арктангенс a»).

ПРИМЕР 1.

а) $\operatorname{arctg} 0 = 0$;

б) $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$;

в) $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

(рис. 117).

Арктангенс числа *a* есть угол α из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a:

$$\operatorname{tg} \alpha = a.$$

Подчеркнем, что для любого числа a существует, и притом единственный, арктангенс этого числа. Из определения арктангенса следует, что для любого числа a

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a.$$

ЗАДАЧА. Для данного числа $a \in \boldsymbol{R}$ найдем все углы α, для каждого из которых

$$\operatorname{tg} \alpha = a. \qquad (1)$$

Рассмотрим единичную окружность и ось тангенсов. Прямая $y = a$ пересекает ось тангенсов в единственной точке D, а прямая OD пересекает единичную окружность в двух точках: B_1 и B_2 (рис. 118).

При этом вектор $\overrightarrow{OB_1}$ образует с вектором $\overrightarrow{OA}$ угол $\alpha_0 = \operatorname{arctg} a$, а вектор $\overrightarrow{OB_2}$ образует с вектором $\overrightarrow{OA}$ угол $\beta_0 = \pi + \alpha_0$. Углы α_0 и β_0

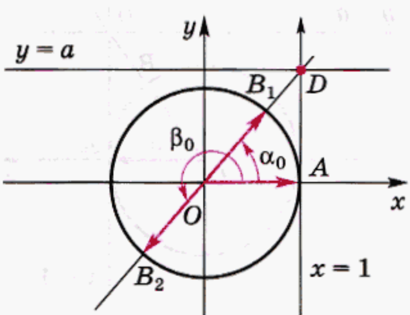


Рис. 118

удовлетворяют условию (1). Очевидно, что все углы $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, и все углы $\alpha = \beta_0 + 2\pi m$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, также удовлетворяют условию (1). Других углов, удовлетворяющих условию (1), нет. Очевидно, что все эти углы можно задать одной формулой:

$$\alpha = \operatorname{arctg} a + \pi n, \; n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ. $\alpha = \operatorname{arctg} a + \pi n, \; n \in \boldsymbol{Z}$.

ПРИМЕР 2. Найдем все углы α, для каждого из которых $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

Все такие углы α задаются формулой

$$\alpha = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 3. Найдем все углы α, для каждого из которых $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$.

Все такие углы α задаются формулой

$$\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (2)$$

Так как $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, то формулу (2) можно записать так:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 4. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\operatorname{tg}\alpha = 0. \qquad (3)$$

Все такие углы задаются формулой

$$\alpha = \operatorname{arctg} 0 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (4)$$

Так как $\operatorname{arctg} 0 = 0$, то формулу (4) можно записать так:

$$\alpha = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (5)$$

Подчеркнем, что условию (3) удовлетворяют лишь углы, заданные формулой (5), и никаких других углов, удовлетворяющих условию (3), нет.

8.30° Назовите угол из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен:

а) 1; б) 0; в) -1; г) $\sqrt{3}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $-\sqrt{3}$; ж) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8.31° а) Что называют арктангенсом числа a?
б) Для любого ли числа a существует $\operatorname{arctg} a$?

Вычислите **(8.32—8.33)**:

8.32 а) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1)$; б) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)$;
в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-3))$; г) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\pi)$;
д) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\sqrt{3})$; е) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
ж) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1999)$; з) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-2000))$.

8.33 а) $\operatorname{arctg} 0$; б) $\operatorname{arctg} 1$; в) $\operatorname{arctg}(-1)$; г) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$;
д) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; е) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; ж) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

8.34 Сравните с нулем:
а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg} 2$; в) $\operatorname{arctg} 3$;
г) $\operatorname{arctg}(-1)$; д) $\operatorname{arctg}(-2)$; е) $\operatorname{arctg}(-3)$;
ж) $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}$; з) $\operatorname{arctg}\pi$; и) $\operatorname{arctg}(-\pi)$.

8.35 Постройте угол:
а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg} 2$; в) $\operatorname{arctg} 3$;
г) $\operatorname{arctg}(-1)$; д) $\operatorname{arctg}(-2)$; е) $\operatorname{arctg}(-3)$;
ж) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; з) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)$; и) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right)$.

8.36 Найдите все углы α, для каждого из которых:
а) $\operatorname{tg}\alpha = 0$; б) $\operatorname{tg}\alpha = 1$; в) $\operatorname{tg}\alpha = -1$;
г) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; д) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$; е) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
ж) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; з) $\operatorname{tg}\alpha = 2$; и) $\operatorname{tg}\alpha = -3$;
к) $\operatorname{tg}\alpha = 5$; л) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$; м) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$.

8.4*. Арккотангенс

Рассмотрим на координатной плоскости xOy единичную окружность и ось котангенсов. Для любого действительного числа a прямая $x = a$ пересекает ось котангенсов в единственной точке D (рис. 119, *а*, *б*).

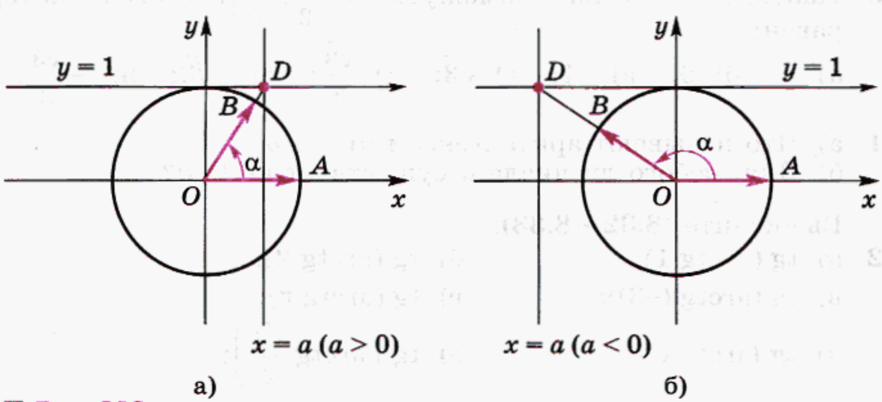


Рис. 119

Прямая OD пересекает верхнюю полуокружность в единственной точке B. При этом вектор $\overrightarrow{OB}$ образует с вектором $\overrightarrow{OA}$ единственный угол α из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a (см. рис. 119). Этот угол обозначают $\operatorname{arcctg} a$ (читают: «арккотангенс a»).

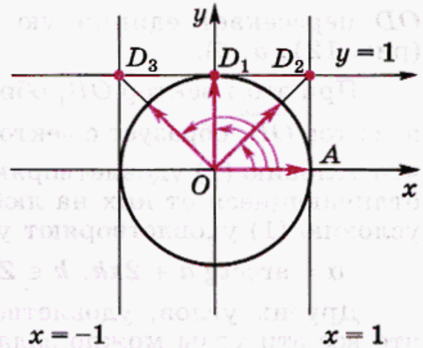


Рис. 120

ПРИМЕР 1.

а) $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$; б) $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$;

в) $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ (рис. 120).

Арккотангенс числа a есть угол α из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a:

$$\operatorname{ctg} \alpha = a.$$

Подчеркнем, что для любого действительного числа a существует, и притом единственный, арккотангенс этого числа.

Из определения арккотангенса следует, что для любого числа a справедливо равенство

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a.$$

ЗАДАЧА. Для данного числа a найдем все углы α, для каждого из которых

$$\operatorname{ctg} \alpha = a. \qquad (1)$$

Рассмотрим единичную окружность и ось котангенсов. Прямая $x = a$ пересекает ось котангенсов в единственной точке D, а прямая

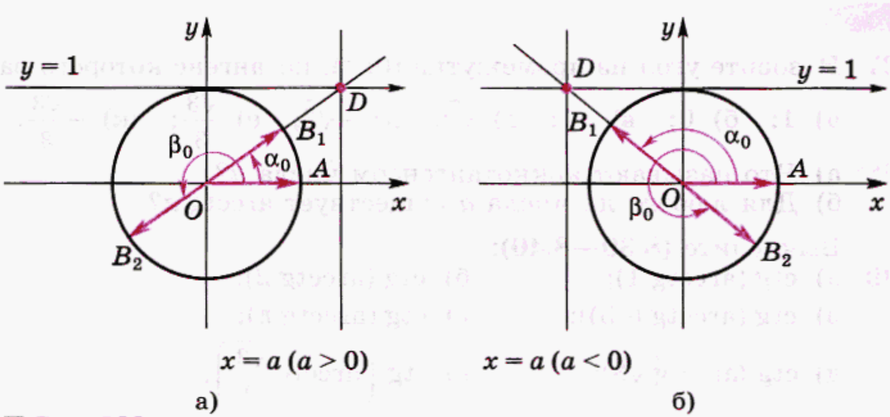


Рис. 121

OD пересекает единичную окружность в двух точках: B_1 и B_2 (рис. 121, *а*, *б*).

При этом вектор $\overrightarrow{OB_1}$ образует с вектором $\overrightarrow{OA}$ угол $\alpha_0 = \operatorname{arcctg} a$, а вектор $\overrightarrow{OB_2}$ образует с вектором $\overrightarrow{OA}$ угол $\beta_0 = \operatorname{arcctg} a + \pi$. Очевидно, что условию (1) удовлетворяют как углы α_0 и β_0, так и любые углы, отличающиеся от них на любое целое число полных оборотов, т. е. условию (1) удовлетворяют углы

$$\alpha = \operatorname{arcctg} a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \text{ и } \alpha = \operatorname{arcctg} a + \pi + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Других углов, удовлетворяющих условию (1), нет. Очевидно, что все эти углы можно задать одной формулой:

$$\alpha = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ. $\operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

ПРИМЕР 2. Найдем все углы α, для каждого из которых $\operatorname{ctg} \alpha = 10$.

Все такие углы α задаются формулой

$$\alpha = \operatorname{arcctg} 10 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 3. Найдем все углы α, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{ctg} \alpha = -1.$$

Все такие углы α задаются формулой

$$\alpha = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (2)$$

Так как $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, то формулу (2) можно записать так:

$$\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

8.37° Назовите угол из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен:

а) 1; б) 0; в) -1; г) $\sqrt{3}$; д) $-\sqrt{3}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; ж) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8.38° а) Что называют арккотангенсом числа a?

б) Для любого ли числа a существует $\operatorname{arcctg} a$?

Вычислите **(8.39—8.40)**:

8.39 а) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 1)$; б) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 2)$;

в) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-3))$; г) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} \pi)$;

д) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} \sqrt{3})$; е) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

ж) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 1999)$; з) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-2000))$.

8.40 а) arcctg 0; б) arcctg 1; в) arcctg (–1);
г) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; д) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$; е) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$;
ж) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

8.41 Сравните с числом $0{,}5\pi$:
а) arcctg 1; б) arcctg 2; в) arcctg 3;
г) arcctg (–1); д) arcctg (–2); е) arcctg (–3);
ж) $\operatorname{arcctg}\frac{\pi}{3}$; з) $\operatorname{arcctg}\pi$; и) $\operatorname{arcctg}(-\pi)$.

8.42 Постройте угол:
а) arcctg 1; б) arcctg 2; в) arcctg 3;
г) arcctg (–1); д) arcctg (–2); е) arcctg (–3);
ж) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$; з) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)$; и) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}$.

8.43 Найдите все углы α, для каждого из которых:
а) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$; в) $\operatorname{ctg}\alpha = -1$;
г) $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$; д) $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$; е) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
ж) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; з) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$; и) $\operatorname{ctg}\alpha = -3$;
к) $\operatorname{ctg}\alpha = 4$; л) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$; м) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{2}{3}$.

8.5*. Примеры использования арктангенса и арккотангенса

Рассмотрим несколько задач, при решении которых используется арктангенс или арккотангенс.

ЗАДАЧА 1. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\operatorname{tg}\alpha > 1. \qquad (1)$$

Рассмотрим на координатной плоскости xOy единичную окружность и ось тангенсов. Пусть точка D имеет на оси тангенсов координату 1 и прямая OD пересекает правую по-

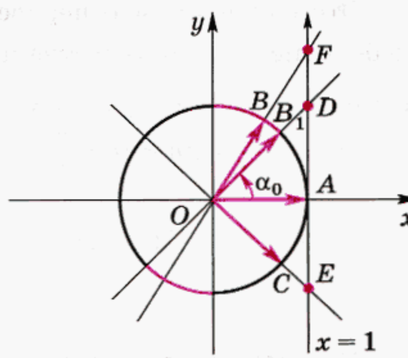


Рис. 122

луокружность в точке B_1, соответствующей углу $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ (рис. 122), при этом $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

Пусть α — любой угол из промежутка

$$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Углу α соответствует точка B правой полуокружности. Пусть прямая OB пересекает ось тангенсов в точке F. Очевидно, что точка F лежит выше точки D, поэтому ее координата на оси тангенсов больше чем 1. Это означает, что $\operatorname{tg}\alpha > 1$ для любого угла α из промежутка (2).

Пусть α — любой угол из промежутка

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{4}. \qquad (3)$$

Углу α соответствует точка C правой полуокружности. Пусть прямая OC пересекает ось тангенсов в точке E. Очевидно, что точка E лежит ниже точки D, поэтому ее координата на оси тангенсов меньше чем 1. Это означает, что $\operatorname{tg}\alpha < 1$ для любого угла α из промежутка (3).

Отметим еще, что для углов $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$ тангенс не определен.

Из сказанного выше следует, что на промежутке длиной π от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ неравенству (1) удовлетворяют лишь углы α из промежутка (2) и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (1).

Очевидно, что если неравенству (1) удовлетворяет некоторый угол α из промежутка (2), то неравенству (1) удовлетворяет и любой угол, отличающийся от α на πn, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Это означает, что неравенству (1) удовлетворяют лишь углы α из бесконечного множества промежутков $\frac{\pi}{4} + \pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (1).

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

ЗАДАЧА 2. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\operatorname{tg}\alpha < -\frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Рассмотрим на координатной плоскости xOy единичную окружность и ось тангенсов. Пусть точка D имеет на оси тангенсов координату $-\frac{1}{2}$ и прямая OD пересекает правую полуокружность в точке B, соответствующей углу $\alpha_0 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (рис. 123).

Рассуждая, как в задаче 1, получим, что на промежутке длиной π от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ неравенству (4) удовлетворяет любой угол α из промежутка

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \alpha_0 \qquad (5)$$

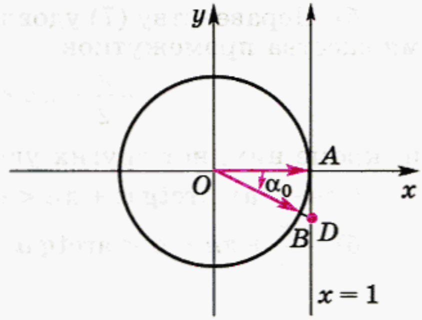


Рис. 123

и, кроме них, на промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ нет других углов, удовлетворяющих неравенству (4).

Очевидно, что если неравенству (4) удовлетворяет некоторый угол α из промежутка (5), то этому неравенству удовлетворяет и любой угол, отличающийся от α на πn, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Это означает, что неравенству (4) удовлетворяют лишь углы α из бесконечного множества промежутков $-\frac{\pi}{2} + \pi n < \alpha < \alpha_0 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (4).

Ответ. $-\frac{\pi}{2} + \pi n < \alpha < \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

ЗАДАЧА 3. Для данного числа a найдем все углы α, для каждого из которых:

а) $\operatorname{tg} \alpha > a$; (6)

б) $\operatorname{tg} \alpha < a$. (7)

Рассмотрим на координатной плоскости xOy единичную окружность и ось тангенсов. Пусть точка D имеет на оси тангенсов координату a и прямая OD пересекает правую полуокружность в точке B, соответствующей углу $\alpha_0 = \operatorname{arctg} a$ (рис. 124).

Рассуждая, как в задачах 1 и 2, получим:

а) Неравенству (6) удовлетворяют лишь углы α из бесконечного множества промежутков

$$\alpha_0 + \pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z},$$

и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (6).

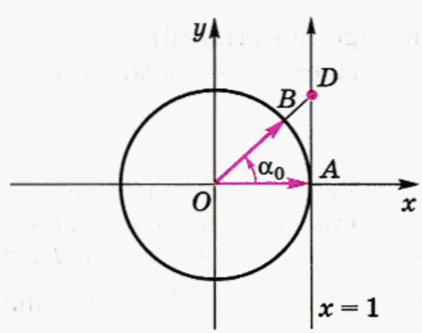


Рис. 124

б) Неравенству (7) удовлетворяют лишь углы α из бесконечного множества промежутков

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < \alpha < \alpha_0 + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z},$$

и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (7).

Ответ. а) $\operatorname{arctg} \alpha + \pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < \alpha < \operatorname{arctg} a + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$.

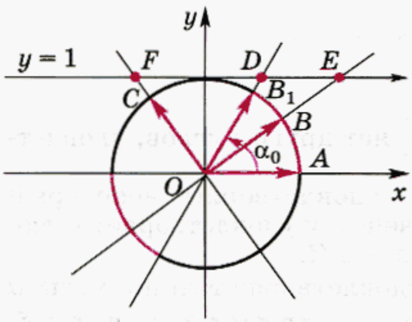


Рис. 125

ЗАДАЧА 4. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\operatorname{ctg} \alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad (8)$$

Рассмотрим на координатной плоскости xOy единичную окружность и ось котангенсов. Пусть точка D имеет на оси котангенсов координату $\frac{\sqrt{3}}{3}$ и прямая OD пересекает верхнюю полуокружность в точке B_1, соответствующей углу $\alpha_0 = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$ (рис. 125).

Пусть α — любой угол из промежутка

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{3}. \qquad (9)$$

Углу α соответствует точка B верхней полуокружности. Пусть прямая OB пересекает ось котангенсов в точке E. Очевидно, что точка E лежит правее точки D, поэтому ее координата на оси котангенсов больше чем $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Это означает, что $\operatorname{ctg} \alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$ для любого угла α из промежутка (9).

Пусть α — любой угол из промежутка

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi. \qquad (10)$$

Углу α соответствует точка C верхней полуокружности. Пусть прямая OC пересекает ось котангенсов в точке F. Очевидно, что точка F лежит левее точки D, поэтому ее координата на оси котангенсов меньше чем $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Это означает, что $\operatorname{ctg} \alpha < \frac{\sqrt{3}}{3}$ для любого угла α из промежутка (10).

Отметим еще, что для углов 0 и π котангенс не определен.

Из сказанного выше следует, что на промежутке длиной π от 0 до π неравенству (8) удовлетворяют лишь углы α из промежутка (9) и, кроме них, на промежутке от 0 до π нет других углов, удовлетворяющих неравенству (8).

Очевидно, что если неравенству (8) удовлетворяет некоторый угол α из промежутка (9), то неравенству (8) удовлетворяет и любой угол, отличающийся от α на πn, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Это означает, что неравенству (8) удовлетворяют лишь углы α из бесконечного множества промежутков $\pi n < \alpha < \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (8).

Ответ. $\pi n < \alpha < \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

ЗАДАЧА 5. Найдем все углы α, для каждого из которых

$$\operatorname{ctg} \alpha < -\frac{5}{4}. \qquad (11)$$

Рассмотрим на координатной плоскости xOy единичную окружность и ось котангенсов. Пусть точка D имеет на оси котангенсов координату $-\frac{5}{4}$ и прямая OD пересекает верхнюю полуокружность в точке B, соответствующей углу $\alpha_0 = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{5}{4}\right)$ (рис. 126).

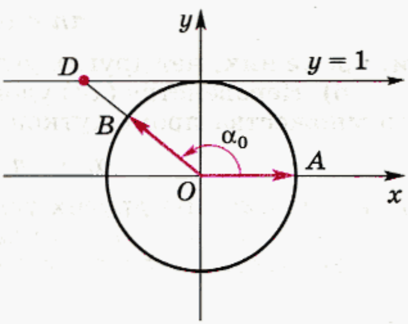


Рис. 126

Рассуждая, как в задаче 4, получим, что на промежутке длиной π от 0 до π неравенству (11) удовлетворяет любой угол α из промежутка

$$\alpha_0 < \alpha < \pi \qquad (12)$$

и, кроме них, на промежутке от 0 до π нет других углов, удовлетворяющих неравенству (11).

Очевидно, что если неравенству (11) удовлетворяет некоторый угол α из промежутка (12), то неравенству (11) удовлетворяет и любой угол, отличающийся от α на πn, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Это означает, что неравенству (11) удовлетворяют лишь углы α из бесконечного множества промежутков

$$\alpha_0 + \pi n < \alpha < \pi + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z},$$

и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (11).

Ответ. $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{5}{4}\right) + \pi n < \alpha < \pi + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

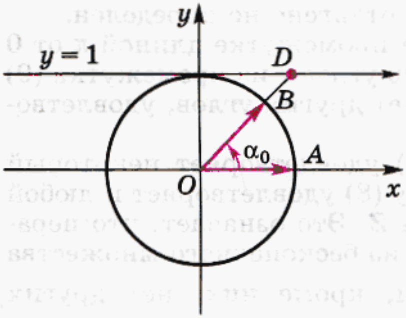


Рис. 127

ЗАДАЧА 6. Для данного числа a найдем все углы α, для каждого из которых:

а) $\operatorname{ctg} \alpha > a$; (13)

б) $\operatorname{ctg} \alpha < a$. (14)

Рассмотрим на координатной плоскости xOy единичную окружность и ось котангенсов. Пусть точка D имеет на оси котангенсов координату a и прямая OD пересекает верхнюю полуокружность в точке B, соответствующей углу $\alpha_0 = \operatorname{arcctg} a$ (рис. 127).

Рассуждая, как в задачах 4 и 5, получим:

а) Неравенству (13) удовлетворяют лишь углы α из бесконечного множества промежутков

$$\pi n < \alpha < \alpha_0 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z},$$

и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (13).

б) Неравенству (14) удовлетворяют лишь углы α из бесконечного множества промежутков

$$\alpha_0 + \pi n < \alpha < \pi + \pi n,\ n \in \mathbf{Z},$$

и, кроме них, нет других углов, удовлетворяющих неравенству (14).

Ответ. а) $\pi n < \alpha < \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

б) $\operatorname{arcctg} a + \pi n < \alpha < \pi + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

8.44 Задайте с помощью неравенств все углы α, которым соответствуют выделенные точки единичной окружности (рис. 128, *а—з*). Определите, какой из этих рисунков соответствует неравенству:

1) $\operatorname{tg} \alpha > 0$; 2) $\operatorname{tg} \alpha < 0$; 3) $\operatorname{ctg} \alpha > 0$;

4) $\operatorname{tg} \alpha < \sqrt{3}$; 5) $\operatorname{tg} \alpha > 1$; 6) $\operatorname{tg} \alpha > -1$;

7) $\operatorname{ctg} \alpha > 1$; 8) $\operatorname{ctg} \alpha > -\sqrt{3}$; 9) $\operatorname{tg} \alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Найдите все такие углы α, для каждого из которых (8.45—8.47):

8.45 а) $\operatorname{tg} \alpha > 1$; б) $\operatorname{tg} \alpha < 1$; в) $\operatorname{tg} \alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\operatorname{tg} \alpha < \frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\operatorname{tg} \alpha > \sqrt{3}$; е) $\operatorname{tg} \alpha < \sqrt{3}$;

ж) $\operatorname{tg} \alpha > -1$; з) $\operatorname{tg} \alpha < -1$; и) $\operatorname{tg} \alpha > -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

к) $\operatorname{tg} \alpha < -\frac{\sqrt{3}}{3}$; л) $\operatorname{tg} \alpha > -\sqrt{3}$; м) $\operatorname{tg} \alpha < -\sqrt{3}$.

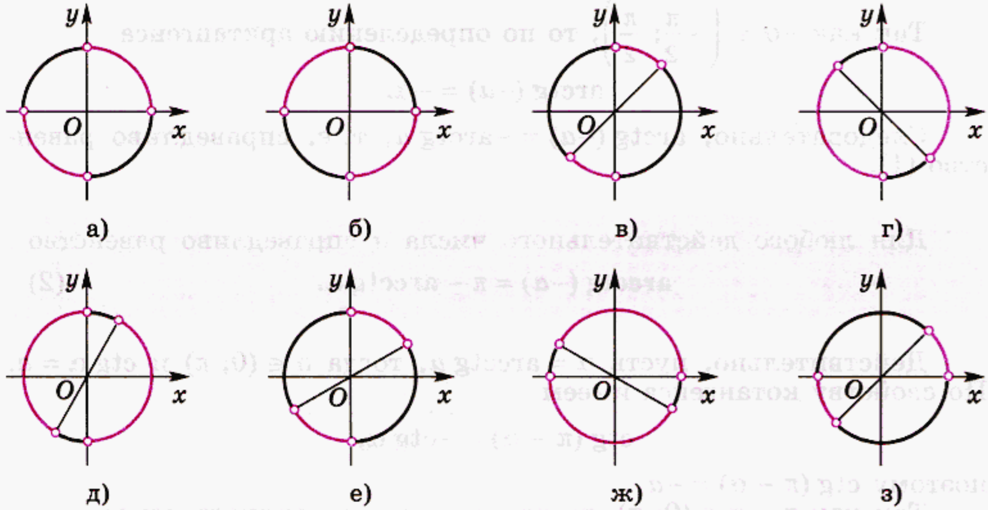


Рис. 128

8.46 а) $\operatorname{ctg}\alpha > 1$; б) $\operatorname{ctg}\alpha < 1$; в) $\operatorname{ctg}\alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha < \frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\operatorname{ctg}\alpha > \sqrt{3}$; е) $\operatorname{ctg}\alpha < \sqrt{3}$;

ж) $\operatorname{ctg}\alpha > -1$; з) $\operatorname{ctg}\alpha < -1$; и) $\operatorname{ctg}\alpha > -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

к) $\operatorname{ctg}\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{3}$; л) $\operatorname{ctg}\alpha > -\sqrt{3}$; м) $\operatorname{ctg}\alpha < -\sqrt{3}$.

8.47 а) $\operatorname{tg}\alpha > \frac{1}{3}$; б) $\operatorname{tg}\alpha > -\frac{1}{4}$; в) $\operatorname{tg}\alpha > 2$;

г) $\operatorname{tg}\alpha < 3$; д) $\operatorname{ctg}\alpha > -\frac{1}{2}$; е) $\operatorname{ctg}\alpha < \frac{1}{3}$;

ж) $\operatorname{ctg}\alpha > 3$; з) $\operatorname{ctg}\alpha < 2$; и) $\operatorname{ctg}\alpha > 2$.

8.6*. Формулы для арктангенса и арккотангенса

Для любого действительного числа a справедливо равенство

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a. \qquad (1)$$

Действительно, пусть $\alpha = \operatorname{arctg} a$, тогда $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}\alpha = a$. По свойству тангенса имеем

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$

поэтому $\operatorname{tg}(-\alpha) = -a$.

Так как $-\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то по определению арктангенса

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\alpha.$$

Следовательно, $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$, т. е. справедливо равенство (1).

Для любого действительного числа a справедливо равенство

$$\mathbf{arcctg}\,(-a) = \pi - \mathbf{arcctg}\, a. \qquad (2)$$

Действительно, пусть $\alpha = \operatorname{arcctg} a$, тогда $\alpha \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg} \alpha = a$. По свойству котангенса имеем

$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

поэтому $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -a$.

Так как $\pi - \alpha \in (0; \pi)$, то по определению арккотангенса

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \alpha.$$

Следовательно, $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$, т. е. справедливо равенство (2).

ПРИМЕР 1.

а) $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$;

б) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$;

в) $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$;

г) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Для любого угла $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо равенство

$$\mathbf{arctg}\,(\mathbf{tg}\,\alpha) = \alpha. \qquad (3)$$

Равенство (3) следует из определения арктангенса.

ПРИМЕР 2. Вычислим $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Так как $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$.

ПРИМЕР 3. Вычислим $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 10)$.

Так как $10 \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то сразу применить формулу (3) нельзя. Но так как $\operatorname{tg} 10 = \operatorname{tg}(10 - 3\pi)$ и $10 - 3\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 10) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(10 - 3\pi)) = 10 - 3\pi.$$

Для любого угла $\alpha \in (0; \pi)$ справедливо равенство

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha. \qquad (4)$$

Равенство (4) следует из определения арккотангенса.

ПРИМЕР 4. Вычислим $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)$.

Так как $\frac{\pi}{3} \in (0; \pi)$, то $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

ПРИМЕР 5. Вычислим $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Так как $-\frac{\pi}{3} \notin (0; \pi)$, то сразу применить формулу (4) нельзя. Но так как $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3} \in (0; \pi)$, то $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

8.48 Запишите формулы для арктангенса и арккотангенса.

8.49 Выразите через арктангенс положительного числа:
а) $\operatorname{arctg}(-2)$; б) $\operatorname{arctg}(-3)$; в) $\operatorname{arctg}(2 - \pi)$;
г) $\operatorname{arctg}(9 - 3\pi)$; д) $\operatorname{arctg}(-20)$; е) $\operatorname{arctg}(-21\pi)$.

8.50 Выразите через арккотангенс положительного числа:
а) $\operatorname{arcctg}(-2)$; б) $\operatorname{arcctg}(-3)$; в) $\operatorname{arcctg}(2 - \pi)$;
г) $\operatorname{arcctg}(9 - 3\pi)$; д) $\operatorname{arcctg}(-20)$; е) $\operatorname{arcctg}(-21\pi)$.

Вычислите (8.51—8.53).

8.51 а) $\operatorname{arctg}(-1)$; б) $\operatorname{arcctg}(-1)$; в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;
г) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$; д) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; е) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

8.52 а) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

г) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; д) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}\right)$; е) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}\right)$;

ж) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$; з) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$; и) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}\right)$.

8.53 а) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$; б) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 5)$; в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-7))$;
г) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-7))$; д) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-10))$; е) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-10))$.

§ 9. Формулы сложения

9.1. Косинус разности и косинус суммы двух углов

ТЕОРЕМА 1. Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Теорему 1 формулируют так: косинус разности двух углов равен произведению косинуса первого угла на косинус второго угла плюс произведение синуса первого угла на синус второго угла.

Доказательство. Пусть даны два угла α и β. Пусть точка B на единичной окружности соответствует углу α, а точка C — углу β (рис. 129). Тогда, используя определение синуса и косинуса угла, получаем, что точка B имеет координаты $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, а точка C — координаты $x = \cos\beta$, $y = \sin\beta$. Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OB}$ имеет координаты $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, а вектор $\vec{b} = \overrightarrow{OC}$ имеет координаты $(\cos\beta;\ \sin\beta)$.

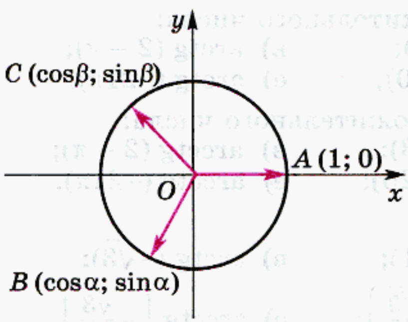


Рис. 129

Вычислим скалярное произведение этих векторов:

$$\vec{a}\,\vec{b} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \quad (1)$$

Но, как известно из геометрии, скалярное произведение двух векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними. Обозначим через γ угол между векторами a и b. Учитывая, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, получаем

$$\vec{a}\,\vec{b} = \cos\gamma. \quad (2)$$

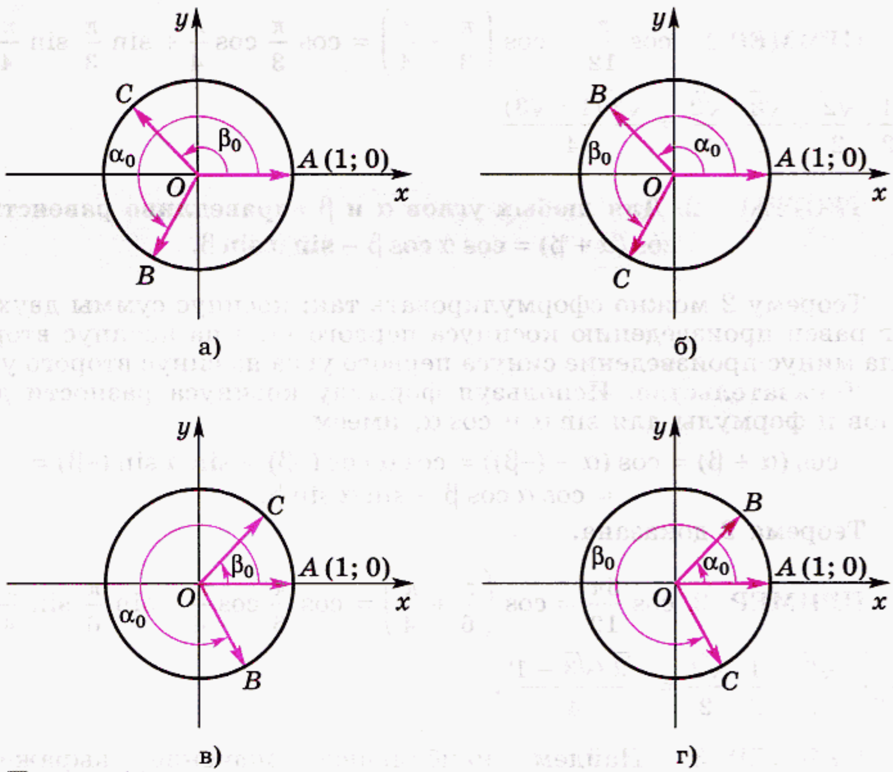


Рис. 130

Отметим, что в геометрии под углом между векторами понимают неотрицательный угол из промежутка от 0 до π. Таким образом, $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$.

Запишем углы α и β в виде $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, $\beta = \beta_0 + 2\pi l$, где $0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi$, $0 \leqslant \beta_0 < 2\pi$, а k и l — некоторые целые числа. Тогда можно считать, что точка B соответствует углу α_0, а точка C — углу β_0. Очевидно, что либо $\gamma = \alpha_0 - \beta_0$ (рис. 130, *а*), либо $\gamma = \beta_0 - \alpha_0$ (рис. 130, *б*), либо $\gamma = 2\pi - (\alpha_0 - \beta_0)$ (рис. 130, *в*), либо $\gamma = 2\pi - (\beta_0 - \alpha_0)$ (рис. 130, *г*), но в любом из этих случаев $\cos \gamma = \cos (\alpha_0 - \beta_0)$.

Так как $\cos (\alpha - \beta) = \cos (\alpha_0 - \beta_0 + 2\pi (k - l)) = \cos (\alpha_0 - \beta_0)$, то

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \gamma. \qquad (3)$$

Тогда из равенств (3), (2) и (1) следует равенство

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Теорема 1 доказана.

ПРИМЕР 1. $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}.$

ТЕОРЕМА 2. Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Теорему 2 можно сформулировать так: косинус суммы двух углов равен произведению косинуса первого угла на косинус второго угла минус произведение синуса первого угла на синус второго угла.

Доказательство. Используя формулу косинуса разности двух углов и формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, имеем

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Теорема 2 доказана.

ПРИМЕР 2. $\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}.$

ПРИМЕР 3. Найдем наибольшее значение выражения $A = \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$. Вынося за скобки множитель $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, получим

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right).$$

Так как наибольшее значение выражения $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$ равно 1, то наибольшее значение выражения $\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$ равно 2. ●

9.1 Запишите формулу:
а) косинуса разности двух углов;
б) косинуса суммы двух углов.

Вычислите, не пользуясь таблицей или калькулятором **(9.2—9.4)**:

9.2 а) $\cos 15°$; б) $\cos 75°$; в) $\cos 105°$.

9.3 а) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$; б) $\sin 10°\sin 70° + \cos 70°\cos 10°$.

9.4 а) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}$; б) $\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{7\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{4}$.

9.5 **Упростите выражение:**

а) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

9.6 **Вычислите** $\cos(\alpha+\beta)$ **и** $\cos(\alpha-\beta)$, **если** $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$ **и** $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

9.7 **Докажите справедливость равенства:**

а) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$;

в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$; г) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$.

9.8 **Вычислите** $\cos(\alpha-\beta)$, **если** $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$ **и** $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$, $\cos\beta=\frac{1}{4}$.

9.9 **Вычислите** $\cos(\alpha+\beta)$, **если** $90°<\alpha<180°$, $90°<\beta<180°$ **и** $\cos\alpha=-0{,}8$, $\sin\beta=0{,}2$.

9.10 **Вычислите:**

а) $\dfrac{\cos 2°\cos 28°-\sin 28°\sin 2°}{\cos 47°\cos 2°+\sin 47°\sin 2°}$; б) $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}}$.

9.11 **Упростите выражение:**

а) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$; б) $\dfrac{\sin\alpha\sin\beta-\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta}$,

где $\alpha\neq\pi m$, $\beta\neq\pi n$, $m\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Вычислите (9.12—9.13):

9.12 а) $\cos 135°$; б) $\cos 15°$; в) $\cos 135°$; г) $\cos 150°$.

9.13 а) $\cos 75°+\cos 15°$; б) $\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}$.

9.14 **Упростите выражение:**

а) $\cos(45°+\alpha)\cos(45°-\alpha)-\sin(45°-\alpha)\sin(45°+\alpha)$;

б) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\alpha$;

в) $\cos^2(60°+\beta)+\cos^2(60°-\beta)+\cos^2\beta$;

г) $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\alpha$.

9.15 а) Косинус острого угла равен 0,2. Найдите косинус смежного угла.

б) Синус острого угла равен $\frac{1}{3}$. Найдите синус смежного угла.

9.16 а) Найдите $\cos\alpha\cos\beta$, если $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{5}$, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$.

б) Найдите $\sin\alpha\sin\beta$, если $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{3}$, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$.

9.17 а) Найдите $\cos(\alpha+\beta)$, если $0°<\alpha<90°$, $180°<\beta<270°$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\sin\beta=-\frac{1}{2}$.

б) Найдите $\cos(\alpha-\beta)$, если $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta=-1$.

9.18* Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения:
а) $\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$; б) $\cos\alpha+\sin\alpha$; в) $\cos\alpha-\sin\alpha$.

9.2. Формулы для дополнительных углов

Два угла α и β, составляющие в сумме угол, равный $\frac{\pi}{2}$, называют дополнительными углами.

ТЕОРЕМА. Для любого угла α справедливы равенства

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha, \tag{1}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha. \tag{2}$$

Доказательство. Используя формулу косинуса разности двух углов, имеем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha+1\cdot\sin\alpha=\sin\alpha,$$

и формула (1) тем самым доказана.

Докажем формулу (2), используя уже доказанную формулу (1). Обозначим $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, тогда по формуле (1)

$$\sin\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right). \tag{3}$$

Теперь, подставляя в формулу (3) $\frac{\pi}{2}-\alpha$ вместо β, получим формулу (2):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

Теорема доказана.

ПРИМЕР.

а) $\cos\frac{3\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8}$;

б) $\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}$.

9.19 Докажите формулы:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

Упростите выражение (9.20—9.22):

9.20 а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$;
г) $\cos\left(\frac{2\pi}{13}-\frac{\pi}{2}\right)$; д) $\cos\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{2}\right)$; е) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$.

9.21 а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$;
г) $\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)$; д) $\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{2}\right)$; е) $\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}\right)$.

9.22 а) $\sin(90°-13°)$; б) $\sin(-90°+24°)$; в) $\sin(-90°-31°)$;
г) $\cos(90°-25°)$; д) $\cos(-90°+17°)$; е) $\cos(-90°-22°)$.

9.23 Выразите число через синус или косинус положительного угла, не превышающего 45°:
а) $\sin 80°=\sin(90°-10°)=\ldots$; б) $\sin 70°$; в) $\cos 82°$;
г) $\sin 440°$; д) $\sin 792°$; е) $\sin 1859°$; ж) $\cos 444°$;
з) $\cos 799°$; и) $\cos 2005°$.

9.24 Выразите число через синус или косинус положительного угла, не превышающего $\frac{\pi}{4}$:

а) $\sin\frac{\pi}{3}$; б) $\cos\frac{\pi}{3}$; в) $\sin\frac{5\pi}{7}$; г) $\cos\frac{11\pi}{13}$;
д) $\sin\frac{13\pi}{5}$; е) $\cos\frac{14\pi}{5}$; ж) $\sin\frac{24\pi}{7}$; з) $\cos\frac{29\pi}{7}$.

9.3. Синус суммы и синус разности двух углов

ТЕОРЕМА 1. Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Теорему 1 можно сформулировать так: синус суммы двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго плюс произведение косинуса первого угла на синус второго.

Доказательство. Используя формулы для дополнительных углов и формулу косинуса разности двух углов, имеем

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Теорема 1 доказана.

ПРИМЕР 1. $\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

ТЕОРЕМА 2. Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Теорему 2 можно сформулировать так: синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго минус произведение косинуса первого угла на синус второго.

Доказательство. Используя формулу синуса суммы двух углов и формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, имеем

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Теорема 2 доказана.

ПРИМЕР 2. $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-$

$-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$

ПРИМЕР 3. Найдем наименьшее значение выражения $A = 3\cos\alpha + 4\sin\alpha$. Вынося за скобки множитель $\sqrt{3^2+4^2} = 5$, получим $A = 5\left(\frac{3}{5}\cos\alpha + \frac{4}{5}\sin\alpha\right)$.

Так как $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, то найдется угол β такой, что $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, а $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Тогда $A = 5(\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha) = 5\sin(\beta+\alpha)$.

Так как наименьшее значение выражения $\sin(\beta+\alpha)$ равно -1, то наименьшее значение выражения A равно -5.

9.25 Запишите формулы:
а) синуса суммы двух углов;
б) синуса разности двух углов;
в) косинуса суммы двух углов;
г) косинуса разности двух углов.

9.26 Докажите справедливость равенства:
а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$; б) $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$;
в) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha$; г) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha$;
д) $\sin(45°+\alpha) = \cos(45°-\alpha)$; е) $\cos(45°+\alpha) = \sin(45°-\alpha)$.

Вычислите (9.27—9.28):

9.27 а) $\sin 20°\cos 10° + \cos 20°\sin 10°$;
б) $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}$;
в) $\cos 80°\sin 10° + \sin 80°\cos 10°$;
г) $\cos\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$.

9.28 а) $\sin 75°$; б) $\sin 105°$; в) $\sin 165°$; г) $\sin 195°$.

Упростите выражение (9.29—9.30):

9.29 а) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

9.30 а) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$;
в) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$; г) $\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$.

9.31 Вычислите:

а) $\sin(\alpha+\beta)$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\frac{1}{3}$;

б) $\sin(\alpha-\beta)$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$ и $\cos\alpha=-0{,}2$, $\cos\beta=-0{,}1$.

9.32 Докажите справедливость равенства:

а) $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$;

б) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

9.33* Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения:

а) $4\cos\alpha-3\sin\alpha$; б) $5\cos\alpha+12\sin\alpha$; в) $\sin\alpha-2\cos\alpha$.

9.4. Сумма и разность синусов и косинусов

ТЕОРЕМА 1. **Для любых углов α и β справедливо равенство**

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Теорему 1 можно сформулировать так: сумма синусов любых двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

ТЕОРЕМА 2. **Для любых углов α и β справедливо равенство**

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Теорему 2 можно сформулировать так: разность синусов любых двух углов равна удвоенному произведению синуса полуразности этих углов на косинус их полусуммы.

ТЕОРЕМА 3. **Для любых углов α и β справедливо равенство**

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Теорему 3 можно сформулировать так: сумма косинусов любых двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

ТЕОРЕМА 4. **Для любых углов α и β справедливо равенство**

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Теорему 4 можно сформулировать так: разность косинусов любых двух углов равна взятому со знаком «–» удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на синус их полуразности.

Доказательство теорем 1, 2, 3, 4. Пусть

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

тогда

$$\alpha = x + y, \quad \beta = x - y.$$

Используя формулы косинуса суммы, косинуса разности, синуса суммы и синуса разности, получим

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) =$$
$$= (\sin x \cos y + \cos x \sin y) + (\sin x \cos y - \cos x \sin y) =$$
$$= 2\sin x \cos y = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin(x + y) - \sin(x - y) =$$
$$= 2\cos x \sin y = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = \cos(x + y) + \cos(x - y) =$$
$$= 2\cos x \cos y = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = \cos(x + y) - \cos(x - y) =$$
$$= -2\sin x \sin y = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Теоремы 1, 2, 3 и 4 доказаны.

ПРИМЕР.

а) $\sin\frac{7\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12} = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

б) $\cos 75° - \cos 15° = -2\sin 45°\sin 30° = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9.34 Запишите формулы:
а) суммы синусов; б) разности синусов;
в) суммы косинусов; г) разности косинусов.

Представьте в виде произведения (9.35—9.37):

9.35 а) $\sin 20° + \sin 10°$; б) $\sin 60° - \sin 30°$;
в) $\cos 70° + \cos 20°$; г) $\cos 80° - \cos 30°$;
д) $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{4}$; е) $\sin\frac{\pi}{14} + \sin\frac{\pi}{3}$;
ж) $\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}$; з) $\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{5}$.

9.36 а) $\sin\alpha + \sin 3\alpha$; б) $\cos 3\alpha - \cos\alpha$; в) $\sin 3\alpha - \sin 5\alpha$; г) $\cos 7\alpha + \cos\alpha$; д) $\sin\alpha + \cos\alpha$; е) $\cos\alpha - \sin\alpha$.

9.37 а) $\cos 40° + \cos 30° + \cos 20° + \cos 10°$;
б) $\sin 5° + \sin 10° + \sin 15° + \sin 20°$.

9.38 Докажите справедливость равенства:
а) $\sin 50° + \sin 10° - \cos 20° = 0$;
б) $\cos 48° + \sin 18° - \cos 12° = 0$.

9.39 Вычислите:
а) $\cos\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}$; б) $\cos\frac{7\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}$;
в) $\sin\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}$; г) $\sin\frac{7\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$.

9.40 Докажите справедливость равенства:
а) $\cos\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{7\pi}{12} = 0$; б) $\sin\frac{3\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5} = 0$;
в) $\cos\frac{9\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14} = 0$; г) $\sin\frac{3\pi}{10} - \sin\frac{7\pi}{10} = 0$.

9.41* Вычислите:
а) $\cos 75° \cdot \cos 105°$; б) $\sin 75° \cdot \sin 15°$;
в) $\cos\frac{75°}{2} \cdot \cos\frac{15°}{2}$; г) $\sin 105° \cdot \cos 15°$.

9.42 Докажите справедливость равенства:
а) $\sin 35° + \sin 25° = \cos 5°$; б) $\cos 20° - \sin 50° = \sin 10°$;
в) $\sin 87° - \sin 93° - \sin 59° + \sin 61° = \sin 1°$.

9.43* Докажите, что $|\sin\alpha + \cos\alpha| \leqslant \sqrt{2}$.

9.44 Представьте в виде произведения:
а) $1 + 2\sin\alpha = 2\left(\frac{1}{2} + \sin\alpha\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\alpha\right) = \ldots$;
б) $1 - 2\cos\alpha$; в) $\sqrt{3} - 2\sin\alpha$.

9.5. Формулы для двойных и половинных углов

ТЕОРЕМА 1. Для любого угла α справедливо равенство

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Это равенство называют формулой синуса двойного угла.

Теорему 1 можно сформулировать так: синус двойного угла 2α равен удвоенному произведению синуса угла α на косинус угла α.

Доказательство. Используя формулу синуса суммы двух углов, получим

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Для любого угла α справедливо равенство

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Это равенство называют формулой косинуса двойного угла.

Теорему 2 можно сформулировать так: косинус двойного угла 2α равен квадрату косинуса угла α минус квадрат синуса угла α.

Доказательство. Используя формулу косинуса суммы двух углов, получим

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Теорема 2 доказана.

ПРИМЕР 1. Найдем $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и α принадлежит интервалу $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Для любого угла α из указанного интервала $\cos\alpha$ отрицателен, поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{7}{25}.$$

ПРИМЕР 2. Докажем равенство $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$.

Так как $\sin\frac{\pi}{5} \neq 0$, то левую часть доказываемого равенства преобразуем так:

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{4\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}.$$

Учитывая, что $\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5}$, окончательно имеем: $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 3. **Для любого угла α справедливо равенство**

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}. \qquad (1)$$

ТЕОРЕМА 4. **Для любого угла α справедливо равенство**

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}. \qquad (2)$$

Доказательство теорем 3 и 4. Используя формулу косинуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество, имеем

$$\cos \alpha = \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получим

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

откуда и следуют формулы (1) и (2).

ПРИМЕР 3. Найдем $\cos \frac{\pi}{8}$.

Применяя формулу квадрата косинуса половинного угла, имеем

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

Так как $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, то $\cos \frac{\pi}{8}$ положителен и $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

ПРИМЕР 4. Найдем $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$ и угол α принадлежит интервалу $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Так как угол α принадлежит указанному интервалу, то $\cos \alpha$ отрицателен, и поэтому $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{7}{9}$.

Применяя формулу квадрата синуса половинного угла, получаем

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{8}{9}.$$

Легко видеть, что угол $\frac{\alpha}{2}$ принадлежит интервалу $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$, поэтому $\sin \frac{\alpha}{2}$ положителен. Теперь находим, что $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. ●

9.45 Запишите формулы:
а) синуса двойного угла; б) косинуса двойного угла.

9.46 Запишите угол в виде 2α, где α — некоторый угол:
а) $30°$; б) $90°$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{3}$; д) 4π; е) π; ж) $\frac{3\pi}{2}$.

9.47 Упростите выражение:
а) $2\sin 15°\cos 15°$; б) $4\sin 22°30'\cos 22°30'$;
в) $5\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$; г) $4\cos(-15°)\sin(-15°)$.

9.48 Вычислите $\sin 2\alpha$, если:
а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Упростите выражение (9.49—9.50):

9.49 а) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$; б) $\sin^2 15° - \cos^2 15°$;
в) $\cos^2 20° - \sin^2 20°$; г) $(\sin\alpha + \cos\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$.

9.50 а) $\sin^2\frac{\pi}{8} - \cos^2\frac{\pi}{8}$; б) $2\sin 50°\sin 40°$;
в) $\cos^2 15° - \cos^2 75°$; г) $(\sin 80° + \sin 10°)(\cos 80° - \cos 10°)$.

9.51 Выразите $\cos 2\alpha$ только через:
а) $\sin\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; б) $\sin\alpha$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
в) $\cos\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; г) $\cos\alpha$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

9.52 Если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то что больше:
а) $\cos 2\alpha$ или $2\cos\alpha$; б) $\sin 2\alpha$ или $2\sin\alpha$?

9.53* Существуют ли углы α, для каждого из которых выполняется равенство $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$?

9.54 Вычислите:
а) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}$; б) $2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$.

9.55 Упростите выражение:
а) $\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha$; б) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$;
в) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha}$ $\left(\alpha \ne -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right)$;
г) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$ $\left(\alpha \ne \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right)$;
д) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$; е) $\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha$.

9.56 Докажите справедливость равенства:

а) $2\sin(0{,}5\pi - \alpha)\sin\alpha = \sin 2\alpha$; б) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = -\cos 2\alpha$;

в) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$; г) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$.

9.57 Запишите углы 30°; 180°; π; 2π в виде $\frac{\alpha}{2}$, где α — некоторый угол.

9.58 Чему равен квадрат:

а) синуса половинного угла; б) косинуса половинного угла?

9.59 Вычислите $\sin\frac{\alpha}{2}$, если:

а) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; б) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

9.60 Вычислите $\cos\frac{\alpha}{2}$, если:

а) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

9.61 Упростите выражение:

а) $2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha$; б) $2\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha$;

в) $4\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\cos\alpha + 3$; г) $4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\cos\alpha + 3$.

Докажите справедливость равенства (**9.62—9.63**):

9.62 а) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2}$;

б) $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha - \beta}{2}$.

9.63 а) $\sin 2\alpha(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \cos 2\alpha(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = 2\cos^2(\alpha - \beta)$;

б) $\sin 2\alpha(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + \cos 2\alpha(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) = 2\sin^2(\alpha - \beta)$;

в) $\cos^3\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha$;

г) $2\sin 2\alpha\sin\alpha + \cos 3\alpha = \cos\alpha$;

д) $1 + 2\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4\cos^2\alpha\cos 2\alpha$;

е) $1 + 2\cos 3\alpha + \cos 6\alpha = 4\cos^2\frac{3\alpha}{2}\cos 3\alpha$;

ж) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

з) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

9.64 Вычислите:

а) $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$; б) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$.

9.6*. Произведение синусов и косинусов

ТЕОРЕМА. Для любых углов α и β справедливы равенства:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)); \qquad (1)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)); \qquad (2)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)). \qquad (3)$$

Доказательство. Выпишем известные формулы синусов и косинусов суммы и разности двух углов:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha; \qquad (4)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha; \qquad (5)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \qquad (6)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (7)$$

Сложив почленно равенства (4) и (5), имеем

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta,$$

откуда получаем справедливость равенства (1).

Сложив почленно равенства (6) и (7), имеем

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta,$$

откуда получаем справедливость равенства (2).

Вычитая почленно из равенства (7) равенство (6), имеем:

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta,$$

откуда получаем справедливость равенства (3).

ПРИМЕР 1. Вычислим $\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}$.

Применив формулу (2), имеем

$$\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

ПРИМЕР 2. Докажем справедливость равенства

$$\sin 2\alpha\sin\alpha + \sin 4\alpha\sin\alpha = \sin 2\alpha\sin 3\alpha. \qquad (8)$$

Применив формулу (3), имеем

$$\sin 2\alpha \sin \alpha + \sin 4\alpha \sin \alpha = \frac{1}{2}(\cos \alpha - \cos 3\alpha) + \frac{1}{2}(\cos 3\alpha - \cos 5\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 3\alpha - \cos 5\alpha) = \frac{1}{2}(\cos \alpha - \cos 5\alpha).$$

Преобразуем по формуле (3) правую часть равенства (8):

$$\sin 2\alpha \sin 3\alpha = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha - 3\alpha) - \cos(2\alpha + 3\alpha)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos(-\alpha) - \cos 5\alpha) = \frac{1}{2}(\cos \alpha - \cos 5\alpha).$$

Так как правая и левая части доказываемого равенства (8) равны одному и тому же выражению, то равенство (8) доказано.

9.65 Преобразуйте в сумму или разность:

а) $\cos 3\alpha \cos \alpha$; б) $\sin 5\alpha \sin 3\alpha$; в) $\sin 4\alpha \cos 2\alpha$;
г) $\cos \alpha \cos 2\alpha$; д) $\sin 2\alpha \sin 3\alpha$; е) $\sin \alpha \cos 4\alpha$.

9.66 Докажите, что:

а) $\sin \frac{9\pi}{28} \cos \frac{5\pi}{28} - \sin \frac{6\pi}{35} \cos \frac{\pi}{35} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{5}$;

б) $\cos \frac{3\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} - \cos \frac{5\pi}{16} \sin \frac{3\pi}{16} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

9.67 Вычислите:

а) $\sin \frac{11\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24}$; б) $\cos \frac{13\pi}{24} \cos \frac{7\pi}{24}$; в) $\sin \frac{7\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24}$;

г) $\cos 63° \cos 27° - \sin 12° \sin 48°$;

д) $\cos \frac{11\pi}{56} \cos \frac{3\pi}{56} - \sin \frac{11\pi}{42} \sin \frac{17\pi}{42}$.

9.68 Докажите справедливость равенства:

а) $\cos \alpha \cos 2\alpha - \cos 3\alpha \cos 4\alpha = \sin 2\alpha \sin 5\alpha$;
б) $\sin \alpha \sin 2\alpha - \sin 3\alpha \sin 4\alpha = -\sin 2\alpha \sin 5\alpha$;
в) $\sin \alpha \cos 2\alpha - \sin 3\alpha \cos 4\alpha = -\sin 2\alpha \cos 5\alpha$.

Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то выполняется равенство (**9.69—9.71**):

9.69* а) $4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$;

б) $4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma$;

в) $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+1=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$;

г) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-1=\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma$.

9.70* а) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

б) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

9.71* а) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

б) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

9.7*. Формулы для тангенсов

ТЕОРЕМА 1. Для любых углов α и β, таких, что $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi l$, $l\in Z$, $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in Z$, справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Это равенство называют формулой тангенса суммы двух углов.

Доказательство. Используя определение тангенса, формулы синуса и косинуса двух углов и условие $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, имеем

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Так как по условию теоремы $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi l$, $l\in Z$, то $\cos\alpha\cos\beta\neq0$. Разделив числитель и знаменатель полученной дроби на $\cos\alpha\cos\beta\neq0$, получим

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Теорема 1 доказана.

ПРИМЕР 1. $\operatorname{tg}75^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ+30^\circ)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}30^\circ}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}30^\circ}=$

$$=\frac{1+\dfrac{\sqrt3}{3}}{1-1\cdot\dfrac{\sqrt3}{3}}=\frac{\left(1+\dfrac{\sqrt3}{3}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\sqrt3}{3}\right)^2}=2+\sqrt3.$$

ТЕОРЕМА 2. **Для любых углов α и β, таких, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi l$, $l \in Z$, $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$, справедливо равенство**

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

ПРИМЕР 2. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} =$

$= \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$

ТЕОРЕМА 3. **Для любых углов α, таких, что $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, справедливо равенство**

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha. \qquad (1)$$

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства (1), пользуясь формулами для $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ и $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha,$$

что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 3. $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}.$

ТЕОРЕМА 4. **Для любого угла α, такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, и $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, справедливо равенство**

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Доказательство. Используя формулу тангенса суммы двух углов, имеем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Теорема 4 доказана.

ПРИМЕР 4. Найдем $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Применим формулу тангенса двойного угла:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}.$$

ТЕОРЕМА 5. Для любых углов α, таких, что $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, справедливо равенство

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}. \qquad (2)$$

Для любых углов α, таких, что $\alpha \neq \pi + \pi n$, $n \in Z$, справедливо равенство

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (3)$$

Доказательство. По определению тангенса угла $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Умножив числитель и знаменатель полученной дроби на $2\cos\frac{\alpha}{2}$ ($\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$, так как по условию $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$), получим

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha},$$

поскольку $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha$ и $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$.

Формула (2) доказана.

Доказательство формулы (3) аналогично.

Теорема 5 доказана.

ПРИМЕР 5. $\operatorname{tg} 22{,}5° = \operatorname{tg}\dfrac{45°}{2} = \dfrac{\sin 45°}{1+\cos 45°} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1.$

ТЕОРЕМА 6. Для любых углов α, таких, что $\alpha \neq \pi + 2\pi n$, $n \in Z$, справедливы равенства

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Доказательство. Для любых углов α, таких, что $\alpha \neq \pi + 2\pi n$, $n \in Z$, существует $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ и $\cos\dfrac{\alpha}{2} \neq 0$, поэтому

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1} = \sin\alpha.$$

Доказательство второй формулы аналогично.

Теорема 6 доказана.

Замечание. Из теоремы 4 следует, что для любых углов $\alpha \neq \pi + 2\pi n$, $n \in Z$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$, справедлива формула $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Таким образом, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ можно выразить через тангенс половинного угла.

9.72 Докажите: а) теорему 2; б) теорему 6.

Вычислите **(9.73—9.75)**:

9.73 а) $\operatorname{tg}(60° + 45°)$; б) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right)$; в) $\operatorname{tg}(60° - 45°)$; г) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

9.74 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{2}{5}$.

9.75 а) $\dfrac{\operatorname{tg}39° + \operatorname{tg}6°}{1-\operatorname{tg}39°\operatorname{tg}6°}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}72° - \operatorname{tg}12°}{1+\operatorname{tg}72°\operatorname{tg}12°}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}37° + \operatorname{tg}23°}{1-\operatorname{tg}37°\operatorname{tg}23°}$; г) $\dfrac{\operatorname{tg}54° - \operatorname{tg}24°}{1+\operatorname{tg}54°\operatorname{tg}24°}$.

9.76 При каких значениях α верно равенство:

а) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$; б) $\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$?

9.77 а) Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{5}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Докажите, что $\alpha + \beta = \dfrac{3\pi}{4}$.

б) Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{7}{3}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = -0{,}4$, $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$. Докажите, что $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$.

9.78* Докажите справедливость равенства:

а) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{16} + \operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{16} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{16}\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{16} = 1$;

б) $\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{8} - \operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{8} - \operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{8}\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{8} = 1$.

9.79 Выразите через котангенс угла α, такого, что $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$:

а) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$; б) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{9}$; в) $\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{7}$; г) $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{5}$.

9.80 Докажите справедливость равенства:

а) $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$,

если $\alpha \ne \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $\alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

9.81 Вычислите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если:

а) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{7}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{4}$; в) $\operatorname{tg}\alpha = 3$; г) $\operatorname{tg}\alpha = -4$;

д) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$; е) $\sin\alpha = -\dfrac{5}{13}$, $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$.

Вычислите **(9.82—9.83)**:

9.82 а) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}$; б) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}$.

9.83 а) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$;

б) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$, $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$;

в) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$;

г) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\dfrac{12}{13}$, $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$.

Докажите, что если α, β и γ — углы треугольника, то справедливо равенство **(9.84—9.85)**:

9.84* а) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

9.85* а) $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = 1$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1$.

9.86* Для углов α, таких, что $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, докажите справедливость равенства

$$\operatorname{tg}3\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha\,(3 - \operatorname{tg}^2\alpha)}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

9.87* Докажите справедливость равенства:

а) $\operatorname{tg}40° + \sqrt{3} = 4\sin 40°$; б) $\operatorname{ctg}70° - \sqrt{3} = -4\cos 70°$.

9.88* Вычислите $\cos(\alpha + 2\beta)$, если:

а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{4}{3}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{3}{4}$.

§ 10. Тригонометрические функции числового аргумента

Ранее уже вводилось общее понятие функции. При этом отмечалось, что одна и та же функция может выражать зависимость между разными физическими величинами, при этом в математике принято рассматривать функцию $y = f(x)$ как функцию числа x, не вникая в физическую сущность величин x и y.

В §§ 7 и 8 говорилось о том, что синус, косинус, тангенс и котангенс есть тригонометрические функции угла. Многие вопросы физики и других наук приводят к тригонометрическим функциям, аргументами которых могут быть различные физические величины — длина, время, температура и т. д.

В этом параграфе тригонометрические функции будут определены как функции числа.

Напомним, что для любого действительного числа x существует угол, радианная мера которого равна x. Далее будем говорить короче: для любого числа x существует угол в x радиан. При этом не будут различаться число x и угол в x радиан.

Функцию $y = f(x)$ называют **периодической**, если существует число $T \neq 0$, такое, что для любого x из области определения функции $y = f(x)$ числа $x + T$ и $x - T$ также входят в область определения функции $y = f(x)$ и выполняется равенство

$$f(x + T) = f(x).$$

Число T называют **периодом** функции $y = f(x)$. Наименьший положительный период $f(x)$ называют ее **главным периодом.**

Обычно рассматривают положительные периоды.

Из данного определения следует, что для любого x из области определения функции $y = f(x)$ справедливо равенство

$$f(x - T) = f(x).$$

Действительно, функция $y = f(x)$ определена в точке $x - T$ и поэтому $f(x) = f((x - T) + T) = f(x - T)$.

10.1. Функция $y = \sin x$

Если каждому действительному числу x поставлено в соответствие число y, равное синусу угла в x радиан, то говорят, что этим определена функция

$$y = \sin x, \tag{1}$$

называемая **синусом числового аргумента** x.

Областью определения функции (1) является множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, областью изменения — отрезок $[-1; 1]$.

Отметим некоторые свойства функции $y = \sin x$.

1. **Функция $y = \sin x$ нечетная.**
2. **Функция $y = \sin x$ периодическая с главным периодом 2π.**
3. **Функция $y = \sin x$ непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$.**
4. **Функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает, а на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ убывает.**

Покажем справедливость этих свойств.

Как показано в п. 7.4, для любого α

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

отсюда и следует справедливость свойства 1.

Там же показано, что для любого α выполняется равенство

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha.$$

В п. 10.2 (задача 2) будет показано, что нет положительного числа $T < 2\pi$, для которого выполняется равенство $\sin(\alpha + T) = \sin\alpha$ для любого α. Из сказанного, учитывая, что функция $y = \sin x$ определена для всех x, и следует справедливость свойства 2.

Как показано в п. 7.3, малому изменению угла соответствует малое изменение синуса, а это означает, что функция $y = \sin x$ непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Тем самым показана справедливость свойства 3.

Там же показано, что если углы α_1 и α_2 таковы, что $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, то справедливо неравенство

$$\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2.$$

А это означает, что на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает.

Аналогично показывается, что на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ убывает.

Тем самым доказана справедливость свойства 4.

Из свойств 2 и 4 следует, что функция $y = \sin x$ возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$, убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Для построения графика функции $y = \sin x$ надо для каждого x вычислить соответствующее значение $y = \sin x$ и точки $(x; y)$ отметить на координатной плоскости xOy. Совокупность этих точек образует график функции $y = \sin x$.

Однако эту работу выполнить невозможно, потому что указанных точек бесконечно много. График функции $y = \sin x$ можно построить приближенно, используя свойства этой функции и ее значения для некоторых x.

Построим сначала график функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Приведем таблицу приближенных значений $y = \sin x$ для некоторых значений x из этого отрезка (табл. 1).

Таблица 1

x	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{\pi}{4}$
$y = \sin x$	0	0,13	0,29	0,38	0,50	0,61	0,71

x	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \sin x$	0,79	0,87	0,92	0,97	0,99	1

Отметим эти точки $(x; y)$ на плоскости в данной прямоугольной системе координат xOy.

Учитывая, что на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ непрерывно возрастает от 0 до 1, соединим отмеченные точки непрерывной линией. Полученную непрерывную кривую (рис. 131) можно рассматривать как приближенный график функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

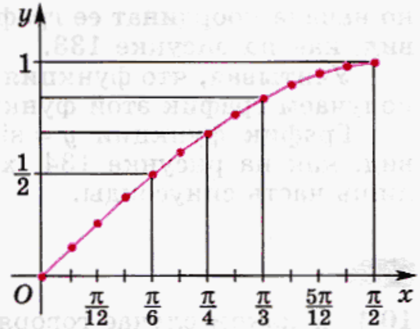


Рис. 131

Дополним этот график функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Учитывая, что $\sin x = \sin(\pi - x)$, получаем, что на отрезке $[0; \pi]$ график функции $y = \sin x$ симметричен относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$. Поэтому график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ будет выглядеть так, как на рисунке 132.

Зная график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$, легко его построить на отрезке $[-\pi; 0]$. Действительно, функция $y = \sin x$ нечетная, поэтому ее график на отрезке $[-\pi; 0]$ симметричен относитель-

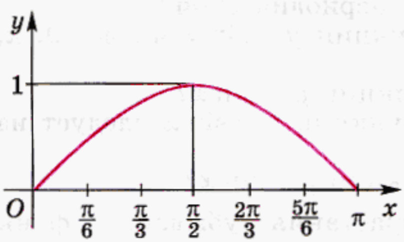


Рис. 132

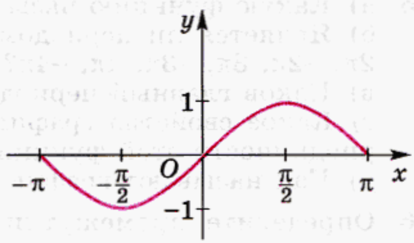


Рис. 133

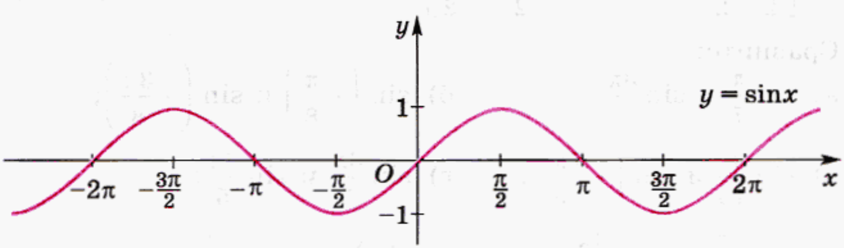


Рис. 134

но начала координат ее графику на отрезке $[0; \pi]$. Значит, он имеет вид, как на рисунке 133.

Учитывая, что функция $y = \sin x$ периодическая с периодом 2π, получаем график этой функции для всех x.

График функции $y = \sin x$ называют **синусоидой**. Она имеет вид, как на рисунке 134, хотя на самом деле на нем изображена лишь часть синусоиды.

10.1° В каком случае говорят, что задана функция $y = \sin x$ числового аргумента x?

10.2° Сформулируйте свойства функции $y = \sin x$.

10.3 а) Постройте график функции $y = \sin x$ по точкам на отрезке $[0; \pi]$.

б) Относительно какой прямой симметричен график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$?

10.4 а) Является ли функция $y = \sin x$ четной (нечетной)? Докажите.

б) Какое свойство графика функции $y = \sin x$ следует из доказанного утверждения?

в) Постройте график функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$, используя это свойство.

г) На каком промежутке функция $y = \sin x$, $x \in [-\pi; \pi]$, положительна? отрицательна?

10.5° а) Какую функцию называют периодической?

б) Является ли периодом функции $y = \sin x$ число: 0, π, $-\pi$, 2π, -2π, 3π, -3π, 4π, -4π?

в) Каков главный период функции $y = \sin x$?

г) Какое свойство графика функции $y = \sin x$ следует из периодичности этой функции?

д) Как называют график функции $y = \sin x$?

10.6 Определите промежутки возрастания (убывания) функции $y = \sin x$ на отрезке:

а) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$; б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; в) $[-\pi; \pi]$; г) $[0; 2\pi]$.

10.7 Сравните:

а) $\sin\frac{\pi}{7}$ и $\sin\frac{3\pi}{7}$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ и $\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$;

в) $\sin\frac{\pi}{15}$ и $\sin\left(-\frac{7\pi}{15}\right)$; г) $\sin\frac{3\pi}{5}$ и $\sin\frac{4\pi}{5}$;

д) $\sin\frac{7\pi}{12}$ и $\sin\frac{11\pi}{12}$; е) $\sin\frac{8\pi}{9}$ и $\sin\frac{7\pi}{9}$.

10.8* Постройте график функции:

а) $y = |\sin x|$; б) $y = \sin(\pi - x)$; в) $y = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$;

г) $y = \sin|x|$; д) $y = |\sin x - 0{,}5|$; е) $y = \sin x - 1$.

10.9* Сколько корней имеет уравнение:

а) $\sin x = x^2$; б) $\sin x = -x^2$; в) $\sin x = \frac{x}{10}$; г) $\sin x = \frac{x}{100}$?

10.2. Функция $y = \cos x$

Если каждому действительному числу x поставлено в соответствие число y, равное косинусу угла в x радиан, то говорят, что этим определена функция

$$y = \cos x, \tag{1}$$

называемая **косинусом числового аргумента** x.

Областью определения функции (1) является множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, областью изменения — отрезок $[-1; 1]$.

Отметим некоторые свойства функции $y = \cos x$.

1. Функция $y = \cos x$ четная.
2. Функция $y = \cos x$ периодическая с главным периодом 2π.
3. Функция $y = \cos x$ непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$.
4. Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ убывает, а на отрезке $[\pi; 2\pi]$ возрастает.

Покажем справедливость этих свойств.

Из п. 7.4 известно, что для любого α выполняется равенство

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

откуда и следует справедливость свойства 1.

Там же показано, что для любого α выполняется равенство

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha.$$

Ниже (задача 1) будет показано, что нет положительного числа $T < 2\pi$, для которого выполняется равенство $\cos(\alpha + T) = \cos\alpha$ для любого α. Из сказанного, учитывая, что функция $y = \sin x$ определена для всех x, и следует справедливость свойства 2.

Как показано в п. 7.3, если углы α_1 и α_2 таковы, что $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \pi$, то справедливо неравенство $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$. А это означает, что на отрезке $[0; \pi]$ функция $y = \cos x$ убывает. Аналогично показывается, что на отрезке $[\pi; 2\pi]$ функция $y = \cos x$ возрастает. Тем самым доказана справедливость свойства 4.

Из свойств 2 и 4 следует, что функция $y = \cos x$ убывает на каждом из промежутков $[0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$, возрастает на каждом из промежутков $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

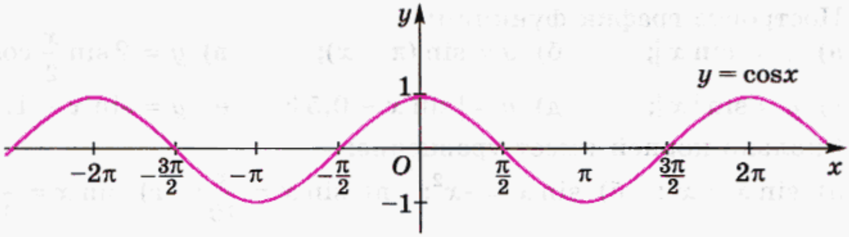


Рис. 135

Так как

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos x = \cos x,$$

то из непрерывности на промежутке $(-\infty; +\infty)$ функции $y = \sin x$ следует непрерывность на промежутке $(-\infty; +\infty)$ функции $y = \cos x$. Кроме того, отсюда же следует, что график функции $y = \cos x$ получается переносом графика функции $y = \sin x$ влево на $\frac{\pi}{2}$, поэтому график функции $y = \cos x$ имеет вид, как на рисунке 135, на котором на самом деле изображена лишь часть графика.

График функции $y = \cos x$ называют **косинусоидой.**

ЗАДАЧА 1. Докажем, что не существует положительного числа T, меньшего 2π, такого, что для любого x выполняется равенство

$$\cos(x + T) = \cos x. \tag{2}$$

Проведем доказательство методом от противного.

Предположим, что существует число T $(0 < T < 2\pi)$, такое, что для любого x выполняется равенство (2). Тогда, в частности, оно выполняется для $x = 0$, т. е. справедливо равенство

$$\cos T = 1. \tag{3}$$

Как показано в п. 7.6 (задача 2), равенство (3) справедливо лишь для $T = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а наименьшее положительное из них равно 2π. Получилось противоречие, т. е. не существует положительного числа T, меньшего 2π, такого, что для любого x выполняется равенство (2).

ЗАДАЧА 2. Докажем, что не существует положительного числа T, меньшего 2π, такого, что для любого x выполняется равенство

$$\sin(x + T) = \sin x. \tag{4}$$

Так как равенство (4) можно переписать в виде

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+T\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right),$$

то из справедливости утверждения задачи 1 следует справедливость утверждения задачи 2. ●

10.10° В каком случае говорят, что задана функция $y = \cos x$ числового аргумента x?

10.11° Сформулируйте свойства функции $y = \cos x$.

10.12 Постройте график функции $y = \cos x$ по точкам на отрезке $[0; \pi]$.

10.13 а) Является ли функция $y = \cos x$ четной (нечетной)? Докажите.
б) Какое свойство графика функции $y = \cos x$ следует из доказанного утверждения?
в) Постройте график функции $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$, используя это свойство.
г) На каком промежутке функция $y = \cos x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, положительна? отрицательна?

10.14° а) Является ли периодом функции $y = \cos x$ число: 0; π; $-\pi$; 2π; -2π; 3π; -3π; 4π; -4π?
б) Каков главный период функции $y = \cos x$?
в) Какое свойство графика функции $y = \cos x$ следует из ее периодичности?
г) Как называют график функции $y = \cos x$?

10.15 Определите промежутки возрастания (убывания) функции $y = \cos x$ на отрезке:
а) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$; б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; в) $[-\pi; \pi]$; г) $[0; 2\pi]$.

10.16 Сравните:
а) $\cos\frac{3\pi}{7}$ и $\cos\frac{2\pi}{7}$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right)$;
в) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\cos\frac{5\pi}{8}$; г) $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$;
д) $\cos\frac{13\pi}{12}$ и $\cos\frac{23\pi}{12}$; е) $\cos\frac{\pi}{9}$ и $\cos\frac{5\pi}{9}$.

10.17* Постройте график функции:
а) $y = |\cos x|$; б) $y = \cos(\pi - x)$; в) $y = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$;
г) $y = \cos|x|$; д) $y = \cos x + 1$; е) $y = |\cos x + 0{,}5|$.

10.18* Сколько корней имеет уравнение:
а) $\cos x = x^2$; б) $\cos x = -x^2$;
в) $\cos x = \frac{x}{10}$; г) $\cos x = \frac{x}{100}$?

10.3. Функция $y = \operatorname{tg} x$

Если каждому действительному числу x, отличному от $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число, поставлено в соответствие число y, равное тангенсу угла в x радиан, то говорят, что этим определена функция

$$y = \operatorname{tg} x, \qquad (1)$$

называемая **тангенсом числового аргумента** x.

Областью определения функции (1) является множество всех действительных чисел x, отличных от $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, областью изменения — интервал $(-\infty; +\infty)$.

Отметим некоторые свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

1. Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетная.
2. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с главным периодом π.
3. Функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
4. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Покажем справедливость этих свойств.

Как показано в п. 8.2, для любого α, для которого существует $\operatorname{tg} \alpha$, справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

откуда и следует справедливость свойства 1.

Там же показано, что для любого α, для которого существует $\operatorname{tg} \alpha$,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg} \alpha.$$

В п. 10.4 (задача 1) будет показано, что не существует положительного числа $T < \pi$, такого, что для любого α из области определения функции $y = \operatorname{tg} x$ выполняется равенство $\operatorname{tg}(\alpha + T) = \operatorname{tg} \alpha$. Откуда, учитывая, что функция $y = \operatorname{tg} x$ определена для всех x, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, и следует, что она периодическая с периодом π, т. е. справедливо свойство 2.

Как показано в п. 8.1, для углов из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ малому изменению угла соответствует малое изменение тангенса, а это означает, что функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тем самым показана справедливость свойства 3.

Как показано в п. 8.2, если углы α_1 и α_2 таковы, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$, то справедливо неравенство $\operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2$. Это и означает, что на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает, т. е. справедливо свойство 4.

Из свойств 2—4 следует, что функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна и возрастает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Теперь перейдем к построению графика функции $y = \operatorname{tg} x$.

Построим его сначала на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Приведем таблицу приближенных значений функции $y = \operatorname{tg} x$ для некоторых x из этого полуинтервала (табл. 2).

Таблица 2

x	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{24}$
$y = \operatorname{tg} x$	0	0,13	0,27	0,41	0,58	0,77
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$
$y = \operatorname{tg} x$	1	1,3	1,73	2,41	3,73	7,6

Отметим эти точки $(x; y)$ на координатной плоскости xOy. Учитывая, что на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$, соединим отмеченные точки непрерывной линией. Полученную непрерывную кривую (рис. 136) можно рассматривать как приближенный график функции $y = \operatorname{tg} x$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Зная график $y = \operatorname{tg} x$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, его можно построить на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Действительно, функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетная, поэтому ее график на полуинтервале $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ симметричен

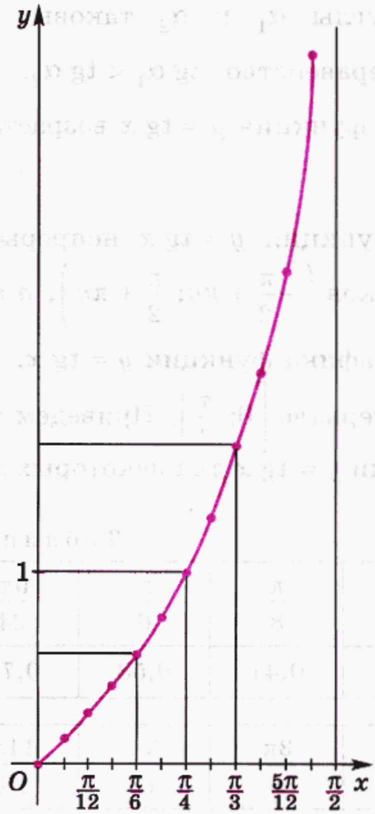


Рис. 136

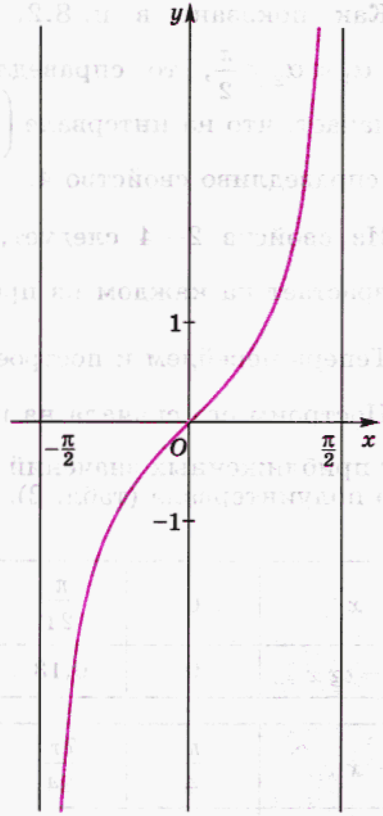


Рис. 137

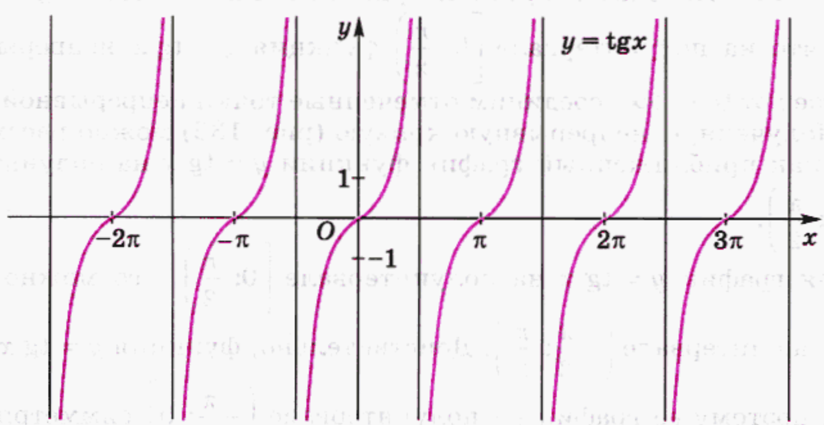


Рис. 138

относительно начала координат ее графику на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Следовательно, график функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ имеет вид, как на рисунке 137.

Наконец, учитывая, что функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π, получим ее график для всех x. График функции $y = \operatorname{tg} x$ называют **тангенсоидой**, он имеет вид, как на рисунке 138, на котором изображена часть графика.

Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена в точках $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, то тангенсоида имеет бесконечно много ветвей — частей ее графика на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

10.19° а) В каком случае говорят, что задана функция $y = \operatorname{tg} x$ числового аргумента x?
б) При каких значениях x определена функция $y = \operatorname{tg} x$?
в) Сформулируйте свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

10.20 Постройте график функции $y = \operatorname{tg} x$ по точкам на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

10.21° а) Является ли функция $y = \operatorname{tg} x$ четной (нечетной)? Докажите.
б) Какое свойство графика функции $y = \operatorname{tg} x$ следует из доказанного утверждения?
в) Постройте график функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, используя это свойство.
г) На каком промежутке функция $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, положительна? отрицательна?

10.22.° а) Является ли периодом функции $y = \operatorname{tg} x$ число: 0; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; π; $-\pi$; $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; 2π; -2π?
б) Каков главный период функции $y = \operatorname{tg} x$?
в) Какое свойство графика функции $y = \operatorname{tg} x$ следует из ее периодичности?
г) Как называют график функции $y = \operatorname{tg} x$?

10.23 Укажите три числовых промежутка, на каждом из которых функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает.

10.24 Сравните:

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$; б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$;

в) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{9}$ и $\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$; г) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{10}$ и $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{10}$;

д) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{11}$ и $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{12}$; е) $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{7}$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$.

10.25* Постройте график функции:

а) $y = |\operatorname{tg} x|$; б) $y = \operatorname{tg}|x|$; в) $y = \operatorname{tg}(\pi - x)$;

г) $y = \operatorname{tg} x - 1$; д) $y = |\operatorname{tg} x - 1|$; е) $y = \operatorname{tg} x \cos x$.

10.4. Функция $y = \operatorname{ctg} x$

Если каждому действительному числу x, отличному от $x = \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, поставлено в соответствие число y, равное котангенсу угла в x радиан, то говорят, что этим определена функция

$$y = \operatorname{ctg} x, \tag{1}$$

называемая **котангенсом числового аргумента** x.

Областью определения функции (1) является множество всех действительных чисел x, отличных от $x = \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, областью изменения — интервал $(-\infty; +\infty)$.

Отметим некоторые свойства функции (1).

1. **Функция $\operatorname{ctg} x$ нечетная.**
2. **Функция $\operatorname{ctg} x$ периодическая с главным периодом π.**
3. **Функция $\operatorname{ctg} x$ непрерывна на интервале $(0; \pi)$.**
4. **Функция $\operatorname{ctg} x$ убывает на интервале $(0; \pi)$.**

Покажем справедливость этих свойств.

Как показано в п. 8.2, для любого α, для которого существует $\operatorname{ctg}\alpha$,

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha,$$

откуда и следует справедливость свойства 1.

Там же показано, что для любого α, для которого существует $\operatorname{ctg}\alpha$,

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Ниже (задача 2) будет показано, что нет положительного числа $T < \pi$, такого, что $\operatorname{ctg}(\alpha + T) = \operatorname{ctg}\alpha$ для любого α из области определения функции $y = \operatorname{ctg} x$. Откуда, учитывая, что функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена для всех x, кроме $x = \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, и следует, что она периодическая с периодом π, т. е. справедливо свойство 2.

Так как

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \qquad (2)$$

а функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то из равенств (2) следует, что функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна на интервале $(0; \pi)$. Тем самым показана справедливость свойства 3.

Как показано в п. 8.2, если углы α_1 и α_2 таковы, что выполняется неравенство $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi$, то справедливо неравенство $\operatorname{ctg} \alpha_1 > \operatorname{ctg} \alpha_2$. А это и означает, что на интервале $(0; \pi)$ функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает. Следовательно, свойство 4 справедливо.

Из свойств 2—4 следует, что функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна и возрастает на каждом из промежутков $(0 + \pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Из равенств (2) следует, что график функции $y = \operatorname{ctg} x$ можно получить из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ так: надо перенести его вправо на $\frac{\pi}{2}$, а затем отобразить симметрично относительно оси Ox. Поэтому график функции $y = \operatorname{ctg} x$ будет иметь вид, как на рисунке 139. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ называют **котангенсоидой**.

Так как функция $y = \operatorname{ctg} x$ не определена в точках $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то котангенсоида имеет бесконечно много ветвей — частей ее графика на интервалах $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

ЗАДАЧА 1. Докажем, что не существует положительного числа T, меньшего π, такого, что для любого x из области определения функции $y = \operatorname{tg} x$ выполняется равенство

$$\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x. \qquad (3)$$

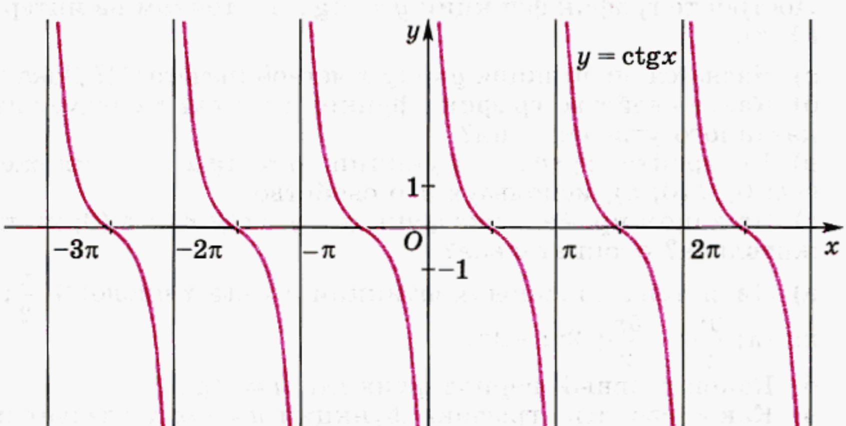


Рис. 139

Проведем доказательство методом от противного. Предположим, что существует число T ($0 < T < \pi$), такое, что для любого x выполняется равенство (3). Тогда, в частности, оно выполняется для $x = 0$, т. е. справедливо равенство

$$\operatorname{tg} T = 0. \tag{4}$$

Как показано в п. 8.3 (пример 4), равенство (4) справедливо лишь для $T = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а наименьшее положительное из них равно π. Получилось противоречие, т. е. не существует положительного числа T, меньшего π, такого, что для любого x выполняется равенство (3).

ЗАДАЧА 2. Докажем, что не существует положительного числа T, меньшего π, такого, что для любого x из области определения функции $y = \operatorname{ctg} x$ выполняется равенство

$$\operatorname{ctg}(x + T) = \operatorname{ctg} x. \tag{5}$$

Так как равенство (5) можно переписать в виде

$$\operatorname{tg}\left(\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + T\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

то из справедливости утверждения задачи 1 следует справедливость утверждения задачи 2. ●

10.26° а) В каком случае говорят, что задана функция $y = \operatorname{ctg} x$ числового аргумента x?

б) При каких значениях x определена функция $y = \operatorname{ctg} x$?

10.27° Сформулируйте свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$.

10.28 Постройте график функции $y = \operatorname{ctg} x$ по точкам на интервале $(0; \pi)$.

10.29° а) Является ли функция $y = \operatorname{ctg} x$ четной (нечетной)? Докажите.

б) Какое свойство графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ следует из доказанного утверждения?

в) Постройте график функции $y = \operatorname{ctg} x$ на множестве $(-\pi; 0) \cup (0; \pi)$, используя это свойство.

г) На каком промежутке функция $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, положительна? отрицательна?

10.30° а) Является ли периодом функции $y = \operatorname{ctg} x$ число: 0; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; π; $-\pi$; $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; 2π; -2π?

б) Каков главный период функции $y = \operatorname{ctg} x$?

в) Какое свойство графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ следует из ее периодичности?

г) Как называют график функции $y = \operatorname{ctg} x$?

10.31 Укажите три числовых промежутка, на каждом из которых функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает.

10.32 Сравните:

а) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}$ и $\operatorname{ctg} \frac{6\pi}{7}$; б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ и $\operatorname{ctg}\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$;

в) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{9}$ и $\operatorname{ctg} \frac{8\pi}{9}$; г) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{10}$ и $\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{10}$;

д) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{11}$ и $\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{12}$; е) $\operatorname{ctg} \frac{6\pi}{7}$ и $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$.

10.33* Постройте график функции:

а) $y = |\operatorname{ctg} x|$; б) $y = \operatorname{ctg} |x|$; в) $y = \operatorname{ctg} x \sin x$;

г) $y = \operatorname{ctg} (\pi - x)$; д) $y = \operatorname{ctg} x + 1$; е) $y = |\operatorname{ctg} x + 1|$.

§ 11. Тригонометрические уравнения и неравенства

11.1. Простейшие тригонометрические уравнения

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ называют **основными тригонометрическими функциями.**

Кроме основных тригонометрических функций, иногда рассматривают и следующие тригонометрические функции: $y = \frac{1}{\cos x}$ и $y = \frac{1}{\sin x}$. Первую из них называют **секансом** x и обозначают $y = \sec x$, а вторую называют **косекансом** x и обозначают $y = \operatorname{cosec} x$, т. е.

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Основные тригонометрические функции являются функциями числового аргумента x в том смысле, что они являются функциями угла, радианная мера которого равна числу x. Говоря об основных тригонометрических функциях, можно не различать число x и угол, радианная мера которого равна x.

Уравнение

$$f(x) = a, \tag{1}$$

где a — данное число, а $f(x)$ — одна из основных тригонометрических функций, называют **простейшим тригонометрическим уравнением.**

Говорят, что простейшее тригонометрическое уравнение (1) имеет период $T > 0$, если функция $y = f(x)$ имеет период T. Очевидно, что если для некоторого простейшего тригонометрического уравнения с периодом T найдено некоторое решение x_0, то любое число $x_k = x_0 + kT$ при любом целом k также является решением этого уравнения. При этом множество всех решений вида $x_k = x_0 + kT$, где k пробегает все целые числа, называют серией решений этого уравнения и записывают в виде

$$x_k = x_0 + kT,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Отметим, что в пп. 7.5, 7.6, 8.3 и 8.4 рассматривались задачи, в которых надо было найти все значения углов, при каждом из которых значение соответствующей основной тригонометрической функции равнялось данному числу a. Хотя там речь шла об угле, подразумевалось, что речь идет о числе — радианной мере этого угла.

В данном пункте можно обобщить решение задач из указанных пунктов, переформулировав их как задачи решения уравнений вида (1).

1. Уравнение $\sin x = a$. Пусть дано простейшее уравнение

$$\sin x = a.$$

Данное уравнение:

а) при $-1 < a < 1$ имеет две серии решений:

$x_k = \arcsin a + 2\pi k,\quad k \in \boldsymbol{Z},\quad$ и $\quad x_m = \pi - \arcsin a + 2\pi m,\quad m \in \boldsymbol{Z}$ (см. п. 7.5, задача 1).

Эти серии решений иногда записывают так:

$$x_n = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

При четном $n = 2k$ получим серию решений x_k, а при нечетном $n = 2m + 1$ получим серию решений x_m;

б) при $a = 1$ имеет одну серию решений $x_k = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ (см. п. 7.5, задача 2);

в) при $a = -1$ имеет одну серию решений $x_k = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ (см. п. 7.5, задача 3);

г) при $a > 1$ и при $a < -1$ не имеет решений (см. п. 7.5, задача 4).

ПРИМЕР 1. Решим уравнение $\sin x = 0{,}2$.

Уравнение имеет две серии решений:

$$x_k = \arcsin 0{,}2 + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ x_m = \pi - \arcsin 0{,}2 + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 2. Решим уравнение $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Уравнение имеет две серии решений:

$$x_k = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ x_m = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi m,\ \ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, то эти две серии решений уравнения можно записать так:

$$x_k = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\quad x_m = \frac{4\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 3. Решим уравнение $\sin x = 0$.

Уравнение имеет две серии решений: $x_k = \arcsin 0 + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x_m = \pi - \arcsin 0 + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Так как $\arcsin 0 = 0$, то эти две серии решений можно записать так: $x_k = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x_m = \pi + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Обе серии решений уравнения можно объединить в одну серию: $x_n = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

ПРИМЕР 4. Решим уравнение $\sin x = \frac{\pi}{2}$.

Так как $|\sin x| \leqslant 1$, а $\frac{\pi}{2} > 1$, то уравнение не имеет решений.

2. Уравнение $\cos x = a$. Пусть дано простейшее уравнение

$$\cos x = a.$$

Данное уравнение:

а) при $-1 < a < 1$ имеет две серии решений:

$$x_k = \arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},\ \text{и}\ x_m = -\arccos a + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$$

(см. п. 7.6, задача 1).

Эти серии решений иногда записывают так:

$$x_k = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$$

б) при $a = 1$ имеет одну серию решений $x_k = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (см. п. 7.6, задача 2);

в) при $a = -1$ имеет одну серию решений $x_k = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (см. п. 7.6, задача 3);

г) при $a > 1$ и при $a < -1$ не имеет решений (см. п. 7.6, задача 4).

ПРИМЕР 5. Решим уравнение $\cos x = 0{,}3$.

Уравнение имеет две серии решений:

$$x_k = \arccos 0{,}3 + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ x_m = -\arccos 0{,}3 + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 6. Решим уравнение $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Уравнение имеет две серии решений: $x_k = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x_m = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Так как $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, то эти две серии решений уравнения можно записать так:

$$x_k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\quad x_m = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 7. Решим уравнение $\cos x = 0$.

Уравнение имеет две серии решений: $x_k = \arccos 0 + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$; $x_m = -\arccos 0 + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}$. Так как $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, то эти две серии решений уравнения можно записать так: $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$; $x_m = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}$. Обе серии можно объединить в одну серию:

$$x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

ПРИМЕР 8. Решим уравнение $\cos x = 1{,}2$.

Так как $|\cos x| \leqslant 1$, а $1{,}2 > 1$, то уравнение не имеет решений.

3. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$. Пусть дано простейшее уравнение

$$\operatorname{tg} x = a.$$

Это уравнение при любом $a \in \mathbf{R}$ имеет одну серию решений $x_k = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ (см. задачу из п. 8.3).

ПРИМЕР 9. Решим уравнение $\operatorname{tg} x = 0{,}7$. Уравнение имеет одну серию решений

$$x_k = \operatorname{arctg} 0{,}7 + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

ПРИМЕР 10. Решим уравнение $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Уравнение имеет одну серию решений $x_k = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Так как $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, то эту серию можно записать так:

$$x_k = -\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

4. Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$. Пусть дано простейшее уравнение

$$\operatorname{ctg} x = a.$$

Это уравнение при любом $a \in \mathbf{R}$ имеет одну серию решений $x_k = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ (см. задачу из п. 8.4).

ПРИМЕР 11. Решим уравнение $\operatorname{ctg} x = 3$.

Уравнение имеет одну серию решений

$$x_k = \operatorname{arcctg} 3 + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

ПРИМЕР 12. Решим уравнение $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

Уравнение имеет одну серию решений

$$x_k = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Так как $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$, то эту серию можно записать так:

$$x_k = \frac{5\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

11.1 Какие уравнения называют простейшими тригонометрическими уравнениями?

Решите уравнение (11.2—11.6):

11.2 а) $\sin x = 1$; б) $\sin x = -1$; в) $\sin x = 0$;
г) $\cos x = 1$; д) $\cos x = -1$; е) $\cos x = 0$;
ж) $\operatorname{tg} x = 1$; з) $\operatorname{tg} x = -1$ и) $\operatorname{tg} x = 0$;
к) $\operatorname{ctg} x = 1$; л) $\operatorname{ctg} x = -1$; м) $\operatorname{ctg} x = 0$.

11.3 а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
г) $\sin x = -\frac{1}{2}$; д) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
ж) $\cos x = \frac{1}{2}$; з) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; и) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
к) $\cos x = -\frac{1}{2}$; л) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; м) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11.4 а) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
г) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; д) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;
ж) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; з) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

11.5* а) $\sin x = \frac{1}{7}$; б) $\cos x = \frac{1}{3}$; в) $\sin x = -\frac{3}{4}$; г) $\cos x = -\frac{3}{8}$;
д) $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$; е) $\operatorname{ctg} x = 2$; ж) $\operatorname{tg} x = -5$; з) $\operatorname{ctg} x = -4$.

11.6* а) $\sin x = \frac{5}{4}$; б) $\cos x = -\frac{\pi}{4}$; в) $\sin x = \frac{\pi}{3}$;
г) $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{4}$; д) $\sin x = \frac{\sqrt{17}}{4}$; е) $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

11.7* При каких значениях a имеет хотя бы одно решение уравнение:
а) $\sin x = a$; б) $\cos x = a$; в) $\operatorname{tg} x = a$; г) $\operatorname{ctg} x = a$?

11.2. Уравнения, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного

Рассмотрим примеры решения уравнений, которые после введения нового неизвестного $t = f(x)$, где $f(x)$ — одна из основных тригонометрических функций, превращаются в квадратные либо рациональные уравнения с неизвестным t.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0. \quad (1)$$

Введем новое неизвестное $\cos x = t$, тогда уравнение (1) превращается в квадратное уравнение с неизвестным t:

$$2t^2 + 3t + 1 = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) имеет два корня $t_1 = -1$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$. Следовательно, множество всех решений уравнения (1) есть объединение множеств всех решений двух уравнений:

$$\cos x = -1 \text{ и } \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Решая каждое из этих простейших тригонометрических уравнений, находим, что множество всех решений уравнения (1) состоит из трех серий решений:

$$x_m = \pi + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}; \quad x_n = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \quad x_k = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$(\sin x - 0{,}5)(\sin x + 1) = 0. \quad (3)$$

Сделав замену неизвестного $t = \sin x$, получим распадающееся уравнение

$$(t - 0{,}5)(t + 1) = 0,$$

имеющее два решения $t_1 = 0{,}5$ и $t_2 = -1$.

Множество всех решений уравнения (3) есть объединение множеств всех решений двух уравнений:

$$\sin x = 0{,}5 \text{ и } \sin x = -1.$$

Решая каждое из этих простейших уравнений, находим, что множество всех решений уравнения (3) состоит из трех серий решений:

$$x_m = \frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}; \quad x_n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \quad x_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Замену неизвестного в простых уравнениях, как в примере 2, обычно не записывают, делая запись решения короче, как в примере 3.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$\cos^2 x = 1. \quad (4)$$

Сначала перепишем уравнение в виде

$$(\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0.$$

Множество всех решений уравнения (4) есть объединение множеств всех решений двух уравнений:

$$\cos x = 1 \text{ и } \cos x = -1.$$

Решая каждое из этих простейших уравнений, находим, что множество всех решений уравнения (4) состоит из двух серий решений:

$$x_m = 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z};\quad x_n = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Обе эти серии можно объединить в одну серию:

$$x_k = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$\operatorname{tg} x - \frac{15}{\operatorname{tg} x} = 2. \tag{5}$$

Введем новое неизвестное $\operatorname{tg} x = t$. Уравнение (5) превращается в рациональное уравнение с неизвестным t:

$$t - \frac{15}{t} = 2,$$

имеющее два решения $t_1 = 5$ и $t_2 = -3$.

Значит, множество всех решений уравнения (5) есть объединение множеств всех решений двух уравнений:

$$\operatorname{tg} x = 5 \text{ и } \operatorname{tg} x = -3.$$

Решая каждое из этих простейших тригонометрических уравнений, находим, что множество всех решений уравнения (5) состоит из двух серий решений:

$$x_m = \operatorname{arctg} 5 + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z};\quad x_n = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Рассмотрим примеры решения уравнений, которые после введения нового неизвестного $t = ax + b$ превращаются в простейшие тригонометрические уравнения с неизвестным t.

ПРИМЕР 5. Решим уравнение

$$\sin 3x = 0. \tag{6}$$

Введем новое неизвестное $3x = t$, тогда уравнение (6) превращается в простейшее тригонометрическое уравнение с неизвестным t:

$$\sin t = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) имеет одну серию решений $t_n = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Следовательно, множество всех решений уравнения (6) находится из условия

$$3x_n = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

откуда находим все решения уравнения (7):

$$x_n = \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Замену неизвестного в простых уравнениях, как в примере 5, обычно не записывают, делая запись решения короче, как в примерах 6 и 7.

ПРИМЕР 6. Решим уравнение

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1. \qquad (8)$$

Множество всех решений этого уравнения задается формулой

$$2x_n - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

откуда находим серию решений уравнения (8):

$$x_n = \frac{5\pi}{8} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 7. Решим уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{3}. \qquad (9)$$

Множество всех решений этого уравнения задается формулой

$$\frac{\pi}{4} - x_n = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

откуда находим все решения уравнения (9):

$$x_n = -\frac{\pi}{12} - \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Решите уравнение (11.8—11.14):

11.8 а) $\sin x(\sin x + 1) = 0$; б) $\cos x(\cos x - 1) = 0$;
в) $\sin^2 x - \sin x = 0$; г) $\cos^2 x + \cos x = 0$;
д) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$; е) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$;
ж) $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x = 0$; з) $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x = 0$.

11.9 а) $\sin^2 x = 1$; б) $\cos^2 x = 1$; в) $\operatorname{tg}^2 x = 1$;
г) $\operatorname{ctg}^2 x = 1$; д) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$; е) $\cos^2 x = \frac{1}{4}$;
ж) $\operatorname{tg}^2 x = 3$; з) $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{3}$; и) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$;
к) $\cos^2 x = \frac{3}{4}$; л) $\operatorname{ctg}^2 x = 3$; м) $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$.

11.10 а) $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$; б) $\cos^2 x + 5\cos x - 6 = 0$;
в) $\sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0$; г) $2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0$;
д) $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$; е) $5\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x + 1 = 0$;
ж) $6\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0$; з) $4\operatorname{tg}^2 x - 7\operatorname{tg} x - 2 = 0$;
и) $\sin^2 x + 2\sin x + 1 = 0$; к) $\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$.

11.11* а) $\operatorname{tg}^2 x - \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = 2{,}5$; б) $3\operatorname{tg}^2 x + \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = -0{,}5$.

11.12 а) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$; б) $\sin 2x=1$; в) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$;

г) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$; д) $\cos 3x=0$; е) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right)=-1$;

ж) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$; з) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-1$; и) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}+2x\right)=-1$;

к) $\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$; л) $\operatorname{ctg}(-4x)=1$; м) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=-1$.

11.13 а) $\sin 2x=\frac{1}{2}$; б) $\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos 3x=-\frac{1}{2}$;

д) $\cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $\operatorname{tg}3x=\sqrt{3}$; з) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

и) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=-\sqrt{3}$; к) $\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$;

л) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$; м) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=-\sqrt{3}$.

11.14* а) $\sin^2 x=\frac{1}{3}$; б) $\cos^2 x=\frac{1}{5}$; в) $\sin^2 x=\frac{1}{5}$;

г) $\cos^2 x=\frac{1}{3}$; д) $\operatorname{tg}^2 x=4$; е) $\operatorname{ctg}^2 x=2$.

11.3. Применение основных тригонометрических формул для решения уравнений

В этом пункте на примерах показано применение некоторых тригонометрических формул при решении уравнений.

1. Применение основного тригонометрического тождества.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$3\sin x=2\cos^2 x. \tag{1}$$

Применяя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, перепишем уравнение (1) в виде

$$2\sin^2 x+3\sin x-2=0. \tag{2}$$

Введем новое неизвестное $\sin x = t$, тогда уравнение (2) превращается в квадратное уравнение с неизвестным t:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет два корня $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = -2$. Поэтому множество всех решений уравнения (2), а значит и уравнения (1), есть объединение множеств всех решений уравнений:

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sin x = -2.$$

Все решения первого из них состоят из двух серий:

$$x_m = \frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}; \quad x_n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Второе уравнение не имеет решений, следовательно, все решения уравнения (1) состоят из двух серий:

$$x_m = \frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}; \quad x_n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

2. Применение формул сложения.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$\sin 5x \cos 3x = \sin 3x \cos 5x. \tag{4}$$

Перенеся все члены уравнения (4) в левую часть и применив формулу синуса разности двух углов, перепишем уравнение (4) в виде

$$\sin 2x = 0. \tag{5}$$

Все решения уравнения (5), а значит и уравнения (4), удовлетворяют условию

$$2x_m = \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Следовательно, уравнение (4) имеет одну серию решений

$$x_m = \frac{\pi}{2} m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

3. Понижение кратности углов. В некоторых случаях при решении тригонометрических уравнений бывает удобно синусы и косинусы кратных углов выражать через синусы и косинусы самих этих углов.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$\sin 2x \cos x + 2 \sin^3 x = 1. \tag{6}$$

Применив формулу синуса двойного угла, перепишем уравнение (6) в виде

$$2 \sin x (\cos^2 x + \sin^2 x) = 1.$$

Применив основное тригонометрическое тождество, перепишем это уравнение в виде

$$\sin x = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Уравнение (7), а значит и уравнение (6), имеет две серии решений:

$$x_m = \frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z};\quad x_n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$\cos 2x - \sin x = 0. \qquad (8)$$

Применив формулу косинуса двойного угла, перепишем уравнение (8) в виде

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0. \qquad (9)$$

Введем новое неизвестное $\sin x = t$, тогда уравнение (9) превращается в квадратное уравнение с неизвестным t:

$$2t^2 + t - 1 = 0,$$

имеющее корни $t_1 = -1$ и $t_2 = \frac{1}{2}$.

Следовательно, множество всех решений уравнения (9) есть объединение множеств всех решений двух уравнений:

$$\sin x = -1 \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

Решая каждое из этих простейших тригонометрических уравнений, находим, что множество всех решений уравнения (9), а значит и уравнения (8), состоит из трех серий решений:

$$x_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\quad x_m = \frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z};\quad x_n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

4. Понижение степени уравнения. Если в уравнении имеется синус или косинус в четной степени, то, выражая квадраты синуса и косинуса половинного угла через косинус угла, можно понизить степень уравнения.

ПРИМЕР 5. Решим уравнение

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}. \qquad (10)$$

Применяя формулы квадрата синуса и квадрата косинуса половинного угла, перепишем уравнение (10) в виде

$$\frac{1 - \cos 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{2} + \frac{1 + \cos 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}. \qquad (11)$$

Так как $\cos 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, а $\cos 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, то уравнение (11) можно переписать в виде

$$\sin x = \frac{1}{2}. \qquad (12)$$

Множество всех решений уравнения (12), а следовательно и уравнения (10), состоит из двух серий решений:

$$x_k = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\quad x_n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Решите уравнение (11.15—11.23):

11.15 а) $2\sin^2 x = 3\cos x$; б) $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$;
в) $2\cos^2 x + 2\cos x + \sin^2 x = 0$; г) $\sin^2 x + 2\cos x - 2 = 0$.

11.16 а) $\sin 2x \cos x - \sin x \cos 2x = 1$;
б) $\sin 3x \cos x + \sin x \cos 3x = 0$;
в) $\cos 5x \cos 4x + \sin 5x \sin 4x = 1$;
г) $\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = -1$;
д) $\cos 2000x \cos 1999x + \sin 2000x \sin 1999x = 0{,}5$;
е) $\sin 2001x \cos 2000x - \sin 2000x \cos 2001x = -0{,}5$.

11.17 а) $\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = 0$;
б) $\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} = 1$.

11.18* а) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = -\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$; г) $\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x = 1$;
д) $\sin x + \cos x = -1$; е) $\cos x + \sin x = 0$.

11.19 а) $\sin 2x \cos x - 3\sin^2 x = 0$; б) $\sin 2x \cos x - 2\sin x = 0$;
в) $\cos 2x + \cos x = 0$; г) $\cos 2x - \cos x = 0$;
д) $1{,}5 - 2\cos 2x = 5\cos x$; е) $0{,}5 + 2\cos 2x = 3\sin x$;
ж) $2\cos 2x - 3 = 8\cos x$; з) $2\cos 2x - 5 = 8\sin x$;
и) $2\sin(0{,}5\pi + 2x) + \cos x = 3$; к) $\cos x + \sin(1{,}5\pi + 2x) = 0$.

11.20 а) $2\cos 2x + 4\sin x = 3$. Является ли число $\frac{5\pi}{6}$ решением этого уравнения?
б) $2\cos 2x + 3 = 4\cos x$. Является ли число $-\frac{7\pi}{3}$ решением этого уравнения?

11.21 а) $3\cos 2x - 5\cos x = 1$; б) $2\cos 2x + 4\sin x = 3$.
Сколько решений имеет это уравнение на отрезке $[0; 2\pi]$? Выпишите их.

11.22 а) $\cos 2x + 3\sin x = 2$. Укажите его наибольшее решение, принадлежащее отрезку $[-3\pi; \pi]$.

б) $\cos 2x + 2 = 3\cos x$. Укажите его наименьшее решение, принадлежащее отрезку $[-2{,}5\pi; -0{,}5\pi]$.

11.23* а) $\cos 4x + 6\sin^2 x = 1$; б) $\cos 4x + 6\cos^2 x = 1$.

11.4. Однородные уравнения

Уравнение

$$a\sin x + b\cos x = 0, \tag{1}$$

где $a \neq 0$ и $b \neq 0$, называют **однородным тригонометрическим уравнением первой степени.**

Покажем, что при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ уравнение (1) равносильно уравнению

$$a\,\mathrm{tg}\,x + b = 0. \tag{2}$$

Пусть x_0 — корень уравнения (1), тогда справедливо числовое равенство

$$a\sin x_0 + b\cos x_0 = 0. \tag{3}$$

Из справедливости равенства (3) следует, что число $\cos x_0$ отлично от нуля (в противном случае, т. е. если $\cos x_0 = 0$, из равенства (3) следует, что и $\sin x_0 = 0$, но одновременно эти равенства выполняться не могут). Разделив обе части равенства (3) на не равное нулю число $\cos x_0$, получим, что справедливо равенство

$$a\,\mathrm{tg}\,x_0 + b = 0. \tag{4}$$

Равенство (4) означает, что число x_0 есть корень уравнения (2). Мы показали, что любой корень уравнения (1) является корнем уравнения (2). Аналогично показывается, что любой корень уравнения (2) является корнем уравнения (1). Следовательно, уравнения (1) и (2) равносильны.

Так как $a \neq 0$, то уравнение (2) можно переписать в виде

$$\mathrm{tg}\,x = -\frac{b}{a},$$

откуда находим все решения уравнения (2), а следовательно, и уравнения (1):

$$x_n = \mathrm{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

которые можно переписать в виде

$$x_n = -\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$\sin x + \cos x = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) равносильно уравнению

$$\operatorname{tg} x + 1 = 0,$$

имеющему одну серию решений $x_n = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Следовательно, уравнение (5) имеет одну серию решений:

$$-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Уравнение

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0, \qquad (6)$$

где $n \in \boldsymbol{N}$ и хотя бы два из коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ отличны от нуля, называют **однородным тригонометрическим уравнением степени n.**

Рассмотрим уравнение (6) в случае $a_0 \neq 0$. Так же как для однородного тригонометрического уравнения первой степени, показывается, что в этом случае уравнение (6) равносильно уравнению

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + \ldots + a_n = 0. \qquad (7)$$

Сделав замену неизвестного $\operatorname{tg} x = t$ в уравнении (7), получим уравнение

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (8)$$

Если удастся найти все корни $t_1, t_2, \ldots, t_k$ уравнения (8), то остается решить каждое из уравнений

$$\operatorname{tg} x = t_1,\ \operatorname{tg} x = t_2,\ \ldots,\ \operatorname{tg} x = t_k. \qquad (9)$$

Тогда множество всех решений исходного уравнения (6) есть объединение множеств всех решений всех уравнений (9).

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$3 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0. \qquad (10)$$

Уравнение (10) равносильно уравнению

$$3 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 2 = 0. \qquad (11)$$

Сделав замену неизвестного $\operatorname{tg} x = t$, получим квадратное уравнение

$$3t^2 - 5t + 2 = 0,$$

имеющее корни $t_1 = 1$ и $t_2 = \frac{2}{3}$.

Следовательно, множество всех решений уравнения (11) есть объединение множеств всех решений двух уравнений:

$$\operatorname{tg} x = 1 \text{ и } \operatorname{tg} x = \frac{2}{3}.$$

Решая каждое из этих простейших тригонометрических уравнений, находим, что множество всех решений уравнения (11), а значит и уравнения (10), состоит из двух серий решений:

$$x_k = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \quad x_m = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$\sin^3 x - \sin^2 x \cos x - 4 \sin x \cos^2 x + 4 \cos^3 x = 0. \qquad (12)$$

Уравнение (12) равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 4 = 0. \qquad (13)$$

Сделав замену неизвестного $\operatorname{tg} x = t$, получим уравнение

$$t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0,$$

имеющее корни $t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ t_3 = -2.$

Следовательно, множество всех решений исходного уравнения (12) есть объединение множеств всех решений трех простейших тригонометрических уравнений:

$$\operatorname{tg} x = 1,\ \operatorname{tg} x = 2,\ \operatorname{tg} x = -2.$$

Решая каждое из этих простейших тригонометрических уравнений, находим, что множество всех решений уравнения (13), а значит и уравнения (12), состоит из трех серий решений:

$$\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \quad \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \quad -\operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Замечание. В пункте 11.8 показан другой способ решения однородных уравнений первой и второй степени.

11.24 Какое уравнение называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени? Приведите примеры.

11.25* Какое уравнение называют однородным тригонометрическим уравнением степени n? Приведите примеры.

Решите уравнение **(11.26—11.27)**:

11.26 а) $\sin x - \cos x = 0$; б) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$;
в) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$; г) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$;
д) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$; е) $\sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x = 0$.

11.27 а) $\sin x - 2 \cos x = 0$; б) $\sin x + 5 \cos x = 0$;
в) $2 \sin x - \cos x = 0$; г) $5 \sin x + \cos x = 0$;
д) $2 \sin x - 3 \cos x = 0$; е) $5 \sin x + 3 \cos x = 0$.

11.28* Докажите, что уравнение

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0,$$

где $n \in N$, $a_0 \neq 0$ и еще хотя бы один из коэффициентов a_1, a_2, ..., a_n отличен от нуля, равносильно уравнению

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + \dots + a_n = 0.$$

Решите уравнение (11.29—11.31):

11.29* а) $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$;
б) $\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0$;
в) $5 \sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 1$;
г) $5 \sin^2 x - 17 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x + 4 = 0$;
д) $3 \cos^2 x - \sin 2x = 0{,}5$;
е) $\sin 2x + 5 \sin^2 x = 1{,}5$.

11.30* а) $\sin^3 x - 2 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x + 2 \cos^3 x = 0$;
б) $\sin^3 x - \sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x + 3 \cos^3 x = 0$;
в) $\sin^3 x - 7 \sin x \cos^2 x - 6 \cos^3 x = 0$;
г) $\sin^3 x - 7 \sin x \cos^2 x + 6 \cos^3 x = 0$;
д) $\sin^3 x + \sin^2 x \cos x - 10 \sin x \cos^2 x + 8 \cos^3 x = 0$;
е) $\sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x - 5 \sin x \cos^2 x - 6 \cos^3 x = 0$.

11.31* а) $2 \cos 4x - \cos^3 x = 2 - 16 \cos^2 x$;
б) $4 \sin^2 x + \sin 4x + 2 \sin 2x \sin 4x = 2$;
в) $\cos 3x \cos x - 2 \cos 2x + 1 = 0$;
г) $\sin 3x + 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$.

11.5*. Простейшие неравенства для синуса и косинуса

Неравенства

$$f(x) > a \tag{1}$$

и

$$f(x) < a, \tag{1'}$$

где a — данное число, а $f(x)$ — одна из основных тригонометрических функций, называют **простейшими тригонометрическими неравенствами**.

Отметим, что в пп. 7.7 и 8.5 рассматривались задачи, в которых надо было найти все значения углов, при каждом из которых значение соответствующей основной тригонометрической функции было больше (меньше) заданного числа a. Хотя там речь шла об углах, подразумевалось, что речь идет о числах — радианных мерах этих углов.

Учитывая сказанное, рассмотренные в пп. 7.7 и 8.5 задачи можно переформулировать как задачи решения неравенств вида (1) или (1′). Поэтому здесь можно подвести итог тому, что было сделано ранее. Но сначала сделаем несколько общих замечаний, относящихся к неравенствам (1) и (1′).

Пусть $y = f(x)$ — некоторая основная тригонометрическая функция с периодом $T > 0$ и пусть дано неравенство (1).

Выберем промежуток длиной T, и пусть множество всех решений неравенства (1) на этом промежутке есть интервал $X_0 = (\alpha; \beta)$, где $\alpha < \beta$ и $\beta - \alpha \leqslant T$.

Тогда, используя периодичность функции $y = f(x)$, получим, что множество всех решений неравенства (1) есть объединение бесконечного множества всех интервалов $X_k = (\alpha + kT; \beta + kT)$, где k — любое целое число. Это бесконечное объединение интервалов будем называть серией интервалов и в дальнейшем будем записывать в виде

$$X_k = (\alpha + kT; \beta + kT),\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (2)$$

Таким образом, будем в дальнейшем говорить, что множество всех решений неравенства (1) есть серия интервалов (2).

Заметим еще, что интервал длиной T можно взять любым, но обычно его выбирают таким, чтобы он удовлетворял двум условиям: во-первых, он должен содержать промежуток, на котором для данной функции $y = f(x)$ определен соответствующий $\arcsin a$, или $\arccos a$, или $\operatorname{arctg} a$, или $\operatorname{arcctg} a$; во-вторых, чтобы множество всех решений данного неравенства на этом промежутке представляло собой один интервал.

1. Неравенства $\sin x > a$ и $\sin x < a$.

Пусть дано простейшее неравенство

$$\sin x > a. \qquad (3)$$

а) При $-1 < a < 1$ множество всех решений неравенства (3) есть серия интервалов

$$X_k = (\arcsin a + 2\pi k; \pi - \arcsin a + 2\pi k),\ k \in \boldsymbol{Z} \qquad (4)$$

(см. п. 7.7, задача 3).

б) При $a \geqslant 1$ неравенство (3) не имеет решений.

в) При $a < -1$ решением неравенства (3) является любое действительное число.

г) При $a = -1$ решением неравенства является любое действительное число, отличное от $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Пусть дано простейшее неравенство

$$\sin x < a. \qquad (5)$$

а) При $-1 < a < 1$ множество всех решений неравенства (5) есть серия интервалов

$$X_k = (\pi - \arcsin a + 2\pi k; 2\pi + \arcsin a + 2\pi k),\ k \in \boldsymbol{Z} \qquad (6)$$

(см. п. 7.7, задача 3).

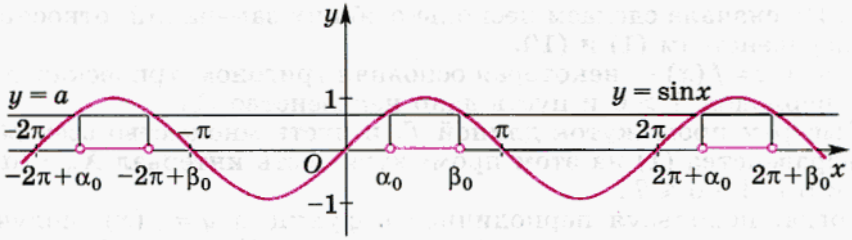


Рис. 140

б) При $a > 1$ решением неравенства (5) является любое действительное число.

в) При $a = 1$ решением неравенства (5) является любое действительное число, отличное от $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

г) При $a \leqslant -1$ неравенство (5) не имеет решений.

Приведенные выше решения неравенств (3) и (5) можно дополнить графической иллюстрацией. Рассмотрим графики функций $y = \sin x$ и $y = a$, $|a| < 1$ (рис. 140). Из рисунка видно, что на промежутке длиной 2π (главный период функции $y = \sin x$) от $\alpha_0 = \arcsin a$ до $2\pi + \alpha_0$ решениями неравенства (3) являются все x из промежутка

$$\alpha_0 < x < \beta_0,$$

а решениями неравенства (5) являются все x из промежутка

$$\beta_0 < x < 2\pi + \alpha_0,$$

где $\beta_0 = \pi - \alpha_0$.

Из рисунка также видно, что на всей оси Ox решениями неравенства (3) являются все x из серии интервалов (4), а решениями неравенства (5) являются все x из серии интервалов (6).

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$\sin x > \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Так как $-1 < \frac{1}{2} < 1$, то множество всех решений неравенства (7) есть серия интервалов

$$X_k = \left(\arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k;\ \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то эту серию интервалов можно переписать в виде

$$X_k = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$$

(см. п. 7.7, задача 1).

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$\sin x < -\frac{2}{3}. \tag{8}$$

Так как $-1 < -\frac{2}{3} < 1$, то множество всех решений неравенства (8) есть серия интервалов

$$X_k = \left(\pi - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k;\ 2\pi + \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$$

(см. п. 7.7, задача 2).

Воспользовавшись равенством $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ (см. п. 7.8), перепишем серию интервалов в виде

$$X_k = \left(\pi + \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k;\ 2\pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2. Неравенства $\cos x > a$ и $\cos x < a$.

Пусть дано простейшее неравенство

$$\cos x > a. \tag{9}$$

а) При $-1 < a < 1$ множество всех решений неравенства (9) есть серия интервалов

$$X_k = (-\arccos a + 2nk;\ \arccos a + 2\pi k),\ k \in \boldsymbol{Z} \tag{10}$$

(см. п. 7.7, задача 6).

б) При $a \geqslant 1$ неравенство (9) не имеет решений.

в) При $a < -1$ решением неравенства (9) является любое действительное число.

г) При $a = -1$ решением неравенства (9) является любое действительное число, отличное от $\pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пусть дано простейшее неравенство

$$\cos x < a. \tag{11}$$

а) При $-1 < a < 1$ множество всех решений неравенства (11) есть серия интервалов

$$X_k = (\arccos a + 2\pi k;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi k),\ k \in \boldsymbol{Z} \tag{12}$$

(см. п. 7.7, задача 6).

б) При $a > 1$ решением неравенства (11) является любое действительное число.

в) При $a \leqslant -1$ неравенство (11) не имеет решений.

г) При $a = 1$ решением неравенства является любое действительное число, отличное от $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Приведенное выше решение неравенств (9) и (11) можно дополнить графической иллюстрацией. Рассмотрим графики функций

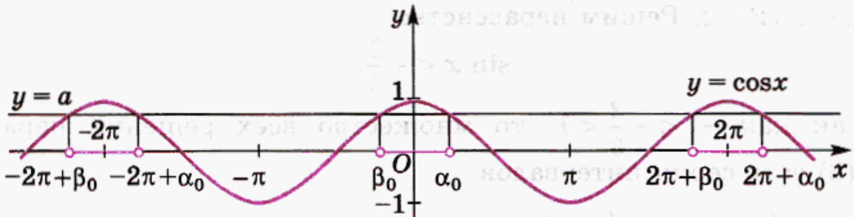


Рис. 141

$y = \cos x$ и $y = a$, $|a| < 1$ (рис. 141). Из рисунка видно, что на промежутке длиной 2π (главный период функции $y = \cos x$) от β_0 до $2\pi + \beta_0$ решениями неравенства (9) являются все x из промежутка

$$\beta_0 < x < \alpha_0,$$

а решениями неравенства (11) являются все x из промежутка

$$\alpha_0 < x < 2\pi + \beta_0,$$

где $\alpha_0 = \arccos a$, а $\beta_0 = -\alpha_0$.

Из рисунка также видно, что на всей оси Ox решениями неравенства (9) являются все x из серии интервалов (10), а решениями неравенства (11) являются все x из серии интервалов (12).

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$\cos x > \frac{1}{2}. \qquad (13)$$

Так как $-1 < \frac{1}{2} < 1$, то множество всех решений неравенства (13) есть серия интервалов

$$X_k = \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$$

(см. п. 7.7, задача 4).

ПРИМЕР 4. Решим неравенство

$$\cos x < -0{,}3. \qquad (14)$$

Так как $-1 < -0{,}3 < 1$, то множество всех решений неравенства (14) есть серия интервалов

$$X_k = (\arccos(-0{,}3) + 2\pi k;\ 2\pi - \arccos(-0{,}3) + 2\pi k),\ k \in \boldsymbol{Z}$$

(см. п. 7.7, задача 5).

Воспользовавшись равенством $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ (см. п. 7.8), перепишем серию интервалов в виде

$$X_k = (\pi - \arccos 0{,}3 + 2\pi k;\ \pi + \arccos 0{,}3 + 2\pi k),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

11.32 Какие неравенства называют простейшими тригонометрическими неравенствами?

Решите неравенство (11.33—11.37):

11.33 а) $\sin x > 0$; б) $\sin x < 0$; в) $\cos x > 0$; г) $\cos x < 0$.

11.34 а) $\sin x > \frac{1}{2}$; б) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\sin x > -\frac{1}{2}$; д) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $\sin x < \frac{1}{2}$; з) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; и) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

к) $\sin x < -\frac{1}{2}$; л) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; м) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11.35 а) $\sin x > \frac{2}{3}$; б) $\sin x > -\frac{2}{3}$; в) $\sin x > -0{,}4$;

г) $\sin x < \frac{2}{3}$; д) $\sin x < -\frac{2}{3}$; е) $\sin x < 0{,}4$.

11.36 а) $\cos x > \frac{1}{2}$; б) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\cos x > -\frac{1}{2}$; д) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $\cos x < \frac{1}{2}$; з) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; и) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

к) $\cos x < -\frac{1}{2}$; л) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; м) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11.37 а) $\cos x > \frac{3}{4}$; б) $\cos x > -\frac{3}{4}$; в) $\cos x > -0{,}7$;

г) $\cos x < \frac{3}{4}$; д) $\cos x < -\frac{3}{4}$; е) $\cos x < 0{,}7$.

11.6*. Простейшие неравенства для тангенса и котангенса

1. Неравенства $\operatorname{tg} x > a$ и $\operatorname{tg} x < a$.

Пусть дано простейшее неравенство

$$\operatorname{tg} x > a. \qquad (1)$$

При любом $a \in \boldsymbol{R}$ множество всех решений неравенства (1) есть серия интервалов

$$X_k = \left(\operatorname{arctg} a + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z} \qquad (2)$$

(см. п. 8.5, задача 3).

Пусть дано простейшее неравенство

$$\operatorname{tg} x < a. \qquad (3)$$

При любом $a \in \boldsymbol{R}$ множество всех решений неравенства (3) есть серия интервалов

$$X_k = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \operatorname{arctg} a + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z} \qquad (4)$$

(см. п. 8.5, задача 3).

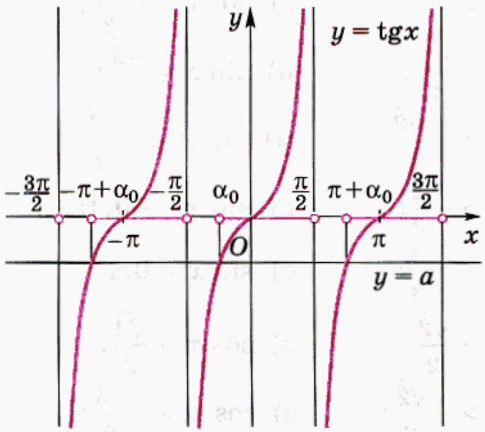


Рис. 142

Приведенное выше решение неравенств (1) и (3) можно дополнить графической иллюстрацией. Рассмотрим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = a$ (рис. 142).

Из рисунка видно, что на промежутке длиной π (главный период функции $y = \operatorname{tg} x$) от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ решениями неравенства (1) являются все x из промежутка

$$\alpha_0 < x < \frac{\pi}{2},$$

а решениями неравенства (3) являются все x из промежутка

$$-\frac{\pi}{2} < x < \alpha_0,$$

где $a_0 = \operatorname{arctg} a$.

Из рисунка также видно, что на всей оси Ox решениями неравенства (1) являются все x из серии интервалов (2), а решениями неравенства (3) являются все x из серии интервалов (4).

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$\operatorname{tg} x > 1. \qquad (5)$$

Множество всех решений неравенства (5) есть серия интервалов

$$X_k = \left(\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$$

(см. п. 8.5, задача 1).

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$\operatorname{tg} x < -\frac{1}{2}. \qquad (6)$$

Множество всех решений неравенства (6) есть серия интервалов

$$X_k = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$$

(см. п. 8.5, задача 2).

Воспользовавшись равенством $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$ (см. п. 8.6), перепишем эту серию интервалов в виде

$$X_k = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2. Неравенства $\operatorname{ctg} x > a$ и $\operatorname{ctg} x < a$.

Пусть дано простейшее неравенство

$$\operatorname{ctg} x > a. \tag{7}$$

При любом $a \in \boldsymbol{R}$ множество всех решений неравенства (7) есть серия интервалов

$$X_k = (\pi k;\ \operatorname{arcctg} a + \pi k),\ k \in \boldsymbol{Z} \tag{8}$$

(см. п. 8.5, задача 6).

Пусть дано простейшее неравенство

$$\operatorname{ctg} x < a. \tag{9}$$

При любом $a \in \boldsymbol{R}$ множество всех решений неравенства (9) есть серия интервалов

$$X_k = (\operatorname{arcctg} a + \pi k;\ \pi + \pi k),\ k \in \boldsymbol{Z} \tag{10}$$

(см. п. 8.5, задача 6).

Приведенное выше решение неравенств (7) и (9) можно дополнить графической иллюстрацией. Рассмотрим графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = a$ (рис. 143).

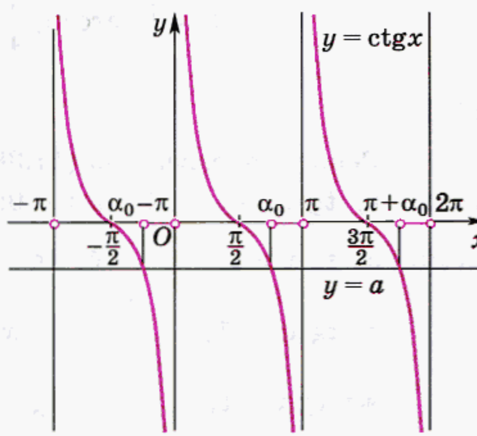


Рис. 143

Из рисунка видно, что на промежутке длиной π (главный период функции $y = \operatorname{ctg} x$) от 0 до π решениями неравенства (7) являются все x из промежутка

$$0 < x < \alpha_0,$$

а решениями неравенства (9) являются все x из промежутка

$$\alpha_0 < x < \pi,$$

где $\alpha_0 = \operatorname{arcctg} a$.

Из рисунка также видно, что на всей оси Ox решениями неравенства (7) являются все x из серии интервалов (8), а решениями неравенства (9) являются все x из серии интервалов (10).

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$\operatorname{ctg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{11}$$

Множество всех решений неравенства (11) есть серия интервалов

$$X_k = \left(\pi k;\ \frac{\pi}{3} + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$$

(см. п. 8.5, задача 4).

ПРИМЕР 4. Решим неравенство

$$\operatorname{ctg} x < -\frac{5}{4}. \qquad (12)$$

Множество всех решений неравенства (12) есть серия интервалов

$$X_k = \left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{5}{4}\right) + \pi k;\ \pi + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$$

(см. п. 8.5, задача 5).

Воспользовавшись равенством $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$ (см. п. 8.6), перепишем эту серию интервалов в виде

$$X_k = \left(-\operatorname{arcctg}\frac{5}{4} + \pi + \pi k;\ \pi + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z},$$

или в виде

$$X_n = \left(-\operatorname{arcctg}\frac{5}{4} + \pi n;\ \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Решите неравенство (11.38—11.42):

11.38 а) $\operatorname{tg} x > 0$; б) $\operatorname{tg} x < 0$; в) $\operatorname{ctg} x > 0$; г) $\operatorname{ctg} x < 0$.

11.39 а) $\operatorname{tg} x > 1$; б) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\operatorname{tg} x > -1$; д) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$; е) $\operatorname{tg} x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

ж) $\operatorname{tg} x < 1$; з) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$; и) $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$;

к) $\operatorname{tg} x < -1$; л) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$; м) $\operatorname{tg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11.40 а) $\operatorname{tg} x > 2$; б) $\operatorname{tg} x > -3$; в) $\operatorname{tg} x > -0{,}5$;
г) $\operatorname{tg} x < -2$; д) $\operatorname{tg} x < -3$; е) $\operatorname{tg} x > 0{,}5$.

11.41 а) $\operatorname{ctg} x > 1$; б) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$; в) $\operatorname{ctg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\operatorname{ctg} x > -1$; д) $\operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}$; е) $\operatorname{ctg} x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

ж) $\operatorname{ctg} x < 1$; з) $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$; и) $\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$;

к) $\operatorname{ctg} x < -1$; л) $\operatorname{ctg} x < -\sqrt{3}$; м) $\operatorname{ctg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11.42 а) $\operatorname{ctg} x > 2$; б) $\operatorname{ctg} x > -2$; в) $\operatorname{ctg} x > -0{,}9$;
г) $\operatorname{ctg} x < 2$; д) $\operatorname{ctg} x < -2$; е) $\operatorname{ctg} x < -0{,}9$.

11.7*. Неравенства, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного

Рассмотрим примеры решения неравенств, которые после введения нового неизвестного $t = f(x)$, где $f(x)$ — одна из основных тригонометрических функций, превращаются в квадратные либо рациональные неравенства с неизвестным t.

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$\cos^2 x - 2{,}5 \cos x + 1 < 0. \tag{1}$$

Введем новое неизвестное $\cos x = t$, тогда неравенство (1) превращается в квадратное неравенство с неизвестным t:

$$t^2 - 2{,}5t + 1 < 0. \tag{2}$$

Все решения неравенства (2) есть все t из интервала

$$\frac{1}{2} < t < 2.$$

Следовательно, множество всех решений неравенства (1) состоит из всех решений двойного неравенства

$$\frac{1}{2} < \cos x < 2.$$

Так как неравенство $\cos x < 2$ выполняется при любых значениях x, то остается решить неравенство

$$\cos x > \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Множество всех решений неравенства (3), а значит, и неравенства (1) есть серия интервалов

$$X_n = \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$\operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} > 1. \tag{4}$$

Введем новое неизвестное $\operatorname{tg} x = t$, тогда неравенство (4) превращается в рациональное неравенство с неизвестным t:

$$t - \frac{2}{t} > 1. \qquad (5)$$

Множество всех решений неравенства (5) есть объединение всех t из интервала $-1 < t < 0$ и всех t из интервала $t > 2$.

Следовательно, множество всех решений неравенства (4) есть объединение всех решений двойного неравенства $-1 < \operatorname{tg} x < 0$ и неравенства $\operatorname{tg} x > 2$.

Множество всех решений двойного неравенства $-1 < \operatorname{tg} x < 0$ есть серия интервалов

$$X_n = \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z},$$

а множество всех решений неравенства $\operatorname{tg} x > 2$ есть серия интервалов

$$X_k = \left(\operatorname{arctg} 2 + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Итак, множество всех решений неравенства (4) состоит из двух серий интервалов:

$$X_n = \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$X_k = \left(\operatorname{arctg} 2 + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Теперь рассмотрим примеры решения неравенств, которые после введения нового неизвестного $t = ax + b$ превращаются в простейшие тригонометрические неравенства с неизвестным t.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (6)$$

Введем новое неизвестное $t = 2x + \dfrac{\pi}{4}$, тогда неравенство (6) перепишется в виде

$$\cos t < \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (7)$$

Множество всех решений неравенства (7) есть серия интервалов

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Следовательно, множество всех решений неравенства (6) находим из условий

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n < 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

откуда находим все решения неравенства (7):

$$\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Итак, множество решений неравенства (6) есть серия интервалов

$$X_n = \left(\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Замену неизвестного в простых случаях, как в примере 3, обычно не записывают, делая запись решения короче, как в примере 4.

ПРИМЕР 4. Решим неравенство

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (8)$$

Множество всех решений неравенства (8) находим из условий

$$\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

откуда находим все решения неравенства (8):

$$3\pi + 4\pi n < x < 4\pi + 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Итак, множество решений неравенства (8) есть серия интервалов

$$X_n = (3\pi + 4\pi n;\ 4\pi + 4\pi n),\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Решите неравенство **(11.43—11.47)**:

11.43 а) $\sin^2 x < \frac{1}{2}$; б) $\cos^2 x < \frac{3}{4}$; в) $\sin^2 x > \frac{3}{4}$;

г) $\cos^2 x > \frac{1}{2}$; д) $\operatorname{tg}^2 x < 1$; е) $\operatorname{tg}^2 x > 3$;

ж) $\operatorname{ctg}^2 x > 1$; з) $\operatorname{ctg}^2 x < \frac{1}{3}$.

11.44 а) $\sin^2 x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x < 0$; б) $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin x > 0$;

в) $\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x < 0$; г) $\cos^2 x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x > 0$;

д) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x < 0$; е) $\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{tg} x > 0$;

ж) $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x < 0$; з) $\operatorname{ctg}^2 x + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{ctg} x > 0$.

11.45 а) $\sin^2 x + 2{,}5 \sin x + 1 < 0$; б) $\sin^2 x - 3{,}5 \sin x - 2 > 0$;
в) $2 \cos^2 x - 3\sqrt{3} \cos x + 3 < 0$; г) $2 \cos^2 x + 3\sqrt{3} \cos x + 3 > 0$;
д) $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 4 < 0$; е) $\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 2 > 0$;
ж) $\operatorname{ctg}^2 x - 4 \operatorname{ctg} x + 3 < 0$; з) $\operatorname{ctg}^2 x + 4 \operatorname{ctg} x + 3 > 0$.

11.46 а) $\sin x - \dfrac{6}{\sin x} + 1 > 0$; б) $\sin x + \dfrac{6}{\sin x} + 5 < 0$;
в) $\cos x - \dfrac{2}{\cos x} + 1 < 0$; г) $\cos x + \dfrac{3}{\cos x} - 4 > 0$;
д) $\operatorname{tg} x - \dfrac{4}{\operatorname{tg} x} + 3 < 0$; е) $\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} > 0$;
ж) $\operatorname{ctg} x - \dfrac{3}{\operatorname{ctg} x} < 0$; з) $\operatorname{ctg} x - \dfrac{4}{\operatorname{ctg} x} + 3 > 0$.

11.47 а) $\sin 2x > 0$; б) $\sin 3x < 0$;
в) $\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$; г) $\cos\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right) < 0$;
д) $\operatorname{tg}(-2x) > 0$; е) $\operatorname{tg}\left(-3x + \dfrac{\pi}{4}\right) < 0$;
ж) $\operatorname{ctg}\left(-3x - \dfrac{\pi}{6}\right) > 0$; з) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) < 0$.

11.8*. Введение вспомогательного угла

Введение вспомогательного угла уже использовалось для преобразования выражений в пунктах 9.1 и 9.3. Покажем, как его можно применять для решения уравнений и неравенств.

Сначала рассмотрим уравнения вида

$$A \sin x + B \cos x = C, \tag{1}$$

где A, B и C — данные числа и $AB \neq 0$.

Так как $A^2 + B^2 > 0$, то, разделив обе части уравнения (1) на число $\sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$, перепишем уравнение (1) в виде

$$a \sin x + b \cos x = c, \tag{1'}$$

где $a = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $b = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $c = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Так как $a^2 + b^2 = 1$, то можно подобрать такой угол α, что $a = \sin \alpha$ и $b = \cos \alpha$. Уравнение (1′) можно записать в виде

$$\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha = c$$

или в виде

$$\cos(x - \alpha) = c. \tag{2}$$

Если подобрать такой угол β, что $a = \cos\beta$ и $b = \sin\beta$, то уравнение (1′) можно записать в виде

$$\sin(x + \beta) = c. \qquad (3)$$

Таким образом, решение уравнения (1) сводится к решению простейшего уравнения (2) или (3).

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}. \qquad (4)$$

Разделив обе части уравнения (4) на $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, перепишем его в виде

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 1.$$

Так как $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$, то уравнение (4) можно записать в виде

$$\cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \sin\frac{\pi}{4} = 1,$$

или в виде

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1. \qquad (5)$$

Все решения уравнения (5), а значит и уравнения (4), задаются формулой

$$x_k - \frac{\pi}{4} = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

следовательно, уравнение (4) имеет одну серию решений

$$x_k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$5\sin x - 12\cos x = 0. \qquad (6)$$

Разделив обе части уравнения (6) на число $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, подберем такой угол α, что $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, например $\alpha = \arcsin\frac{12}{13}$. Тогда уравнение (6) перепишем в виде

$$\sin(x - \alpha) = 0. \qquad (7)$$

Все решения уравнения (7) задаются формулой $x_k - \alpha = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, откуда получаем, что уравнение (6) имеет единственную серию решений $x_k = \arcsin\frac{12}{13} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Теперь рассмотрим неравенства вида

$$A \sin x + B \cos x > C,$$

где A, B и C — данные числа и $AB \neq 0$.

Введение вспомогательного угла позволяет свести решение таких неравенств к решению простейших неравенств.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x < -1. \tag{8}$$

Разделив обе части неравенства (8) на число $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, перепишем его в виде

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x < -\frac{1}{2}. \tag{9}$$

Так как $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, а $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$, то неравенство (9) перепишется в виде

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{1}{2}. \tag{10}$$

Все решения неравенства (10) задаются условиями

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x - \frac{\pi}{3} < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Отсюда получаем, что все решения неравенства (8) есть серия интервалов

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 4. Решим неравенство

$$3\sin x - 4\cos x > 0. \tag{11}$$

Разделив обе части неравенства (11) на 5, перепишем его в виде

$$\frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x > 0. \tag{12}$$

Найдем угол α, такой, что $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, а $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Например, $\alpha = \arcsin\frac{4}{5}$.

Тогда неравенство (12) перепишется в виде

$$\sin(x - \alpha) > 0. \tag{13}$$

Все решения неравенства (13) задаются условиями

$$2\pi n < x - \alpha < \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Отсюда получаем, что все решения неравенства (11) есть серия интервалов

$$(\alpha + 2\pi n;\ \pi + \alpha + 2\pi n),\ n \in \boldsymbol{Z},\ \text{где } \alpha = \arcsin\frac{4}{5}.$$

Введение вспомогательного угла позволяет решать уравнения вида

$$A\sin^2 x + B\sin x\cos x = C$$

и неравенства вида

$$A\sin^2 x + B\sin x\cos x > C,$$

где A, B и C — данные числа и $AB \neq 0$.

Для этого надо сначала применить формулы двойного угла, а затем ввести вспомогательный угол.

ПРИМЕР 5. Решим уравнение

$$2\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x\cos x = \sqrt{3} + 1. \qquad (14)$$

Применив формулы двойного угла, перепишем уравнение (14) в виде

$$\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = -1. \qquad (15)$$

Разделив обе части уравнения (15) на $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2}. \qquad (16)$$

Так как $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, а $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$, то уравнение (16) перепишется в виде

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}. \qquad (17)$$

Все решения уравнения (17) задаются формулами

$$2x_k + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \text{ и } 2x_n + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z},$$

откуда получим, что уравнение (14) имеет две серии решений:

$$x_k = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \text{ и } x_n = -\frac{7\pi}{6} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

ПРИМЕР 6. Решим неравенство

$$2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x > \sqrt{2} + 1. \qquad (18)$$

Применив формулы двойного угла, перепишем неравенство (18) в виде

$$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x > \sqrt{2}. \qquad (19)$$

Разделив обе части неравенства (19) на 2, перепишем его в виде

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (20)$$

Так как $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, то неравенство (20) перепишется в виде

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (21)$$

Все решения неравенства (21) задаются условиями

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n < 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Отсюда получаем, что все решения неравенства (18) есть серия интервалов

$$\left(\frac{5\pi}{24} + \pi n;\ \frac{11\pi}{24} + \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Приведенным выше способом решают также однородные тригонометрические уравнения и неравенства второй степени.

Решите уравнение **(11.48—11.51)**:

11.48 а) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$; б) $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}$;

в) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin x - \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$; е) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = -1$;

ж) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$; з) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = -\sqrt{3}$.

11.49 а) $3\sin x + 4\cos x = 5$; б) $3\sin x - 4\cos x = -5$;

в) $4\sin x - 3\cos x = 5$; г) $4\sin x + 3\cos x = -5$;

д) $5\sin x + 12\cos x = 13$; е) $5\sin x - 12\cos x = -13$;

ж) $12\sin x - 5\cos x = 13$; з) $12\sin x + 5\cos x = -13$.

11.50* а) $4\sin x - 5\cos x = 2$; б) $3\sin x + 2\cos x = 3$;

в) $2\sin x + 3\cos x = 3$; г) $5\sin x - 2\cos x = 2$;

д) $4\sin x + 5\cos x = -2$; е) $3\sin x - 2\cos x = -3$;

ж) $2\sin x - 3\cos x = 0$; з) $5\sin x + 2\cos x = 0$.

11.51* а) $2\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x\cos x = \sqrt{3} - 1$;

б) $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 1$;

в) $(2 + \sqrt{3})\sin^2 x - (3 + \sqrt{3})\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;

г) $(1 + \sqrt{3})\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = 0$.

Решите неравенство **(11.52—11.54)**:

11.52* а) $\sin x + \cos x > -\sqrt{2}$; б) $\sin x - \cos x < \sqrt{2}$;

в) $\sin x + \cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin x - \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) $\sin x + \sqrt{3}\cos x > 1$; е) $\sin x - \sqrt{3}\cos x < -1$;

ж) $3\sin x - 4\cos x > 0$; з) $5\sin x - 12\cos x < 0$.

11.53* а) $2\sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x\cos x > \sqrt{3} + 1$;

б) $2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x > \sqrt{2} - 1$;

в) $2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x < \sqrt{2} + 1$;

г) $2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x < 1 + \sqrt{3}$.

11.54* а) $3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 3\cos^2 x < 0$;

б) $3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 3\cos^2 x > 0$;

в) $\sin^2 x - (\sqrt{3} - 1)\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x > 0$;

г) $\sin^2 x + (\sqrt{3} - 1)\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x < 0$;

д) $3\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 5\cos^2 x \geqslant 0$.

11.9*. Замена неизвестного $t = \sin x + \cos x$

Рассмотрим уравнения и неравенства, в которые входят выражения $\sin x + \cos x$ и $\sin 2x$. Их удобно решать при помощи замены неизвестного $\sin x + \cos x = t$, так как при этом

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x - 1 =$$
$$= (\sin x + \cos x)^2 - 1 = t^2 - 1.$$

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$2\sin 2x + \sin x + \cos x = 1. \quad (1)$$

Введем новое неизвестное $\sin x + \cos x = t$, тогда уравнение (1) превращается в квадратное уравнение с неизвестным t:

$$2t^2 + t - 3 = 0.$$

Так как корни этого уравнения $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{3}{2}$, то множество решений уравнения (1) есть объединение множеств решений двух уравнений:

$$\sin x + \cos x = 1 \text{ и } \sin x + \cos x = -\frac{3}{2}.$$

Каждое из этих уравнений решаем введением вспомогательного угла. При этом первое уравнение преобразуется к виду

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (2)$$

а второе — к виду

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}. \quad (3)$$

Все решения уравнения (2) задаются формулами

$$x_n - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\quad x_k - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

откуда получаем, что уравнение (2) имеет две серии решений:

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\quad x_k = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как $\left|-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right| > 1$, то уравнение (3) не имеет решений.

Итак, уравнение (1) имеет две серии решений:

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\quad x_k = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Если в уравнение входят выражения $\sin x - \cos x$ и $\sin 2x$, то делают замену неизвестного $\sin x - \cos x = t$. При этом $\sin 2x = 1 - t^2$.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$\sin^3 x - \cos^3 x = 3 \sin x \cos x - 1. \tag{4}$$

Поскольку $\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)$, то, введя новое неизвестное $\sin x - \cos x = t$, получим, что уравнение (4) превращается в уравнение с неизвестным t:

$$t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0.$$

Так как корни этого уравнения есть $t_1 = -1$, $t_2 = 2 - \sqrt{3}$ и $t_3 = 2 + \sqrt{3}$, то множество решений уравнения (4) есть объединение множеств решений уравнений

$$\sin x - \cos x = -1,\quad \sin x - \cos x = 2 - \sqrt{3},$$
$$\sin x - \cos x = 2 + \sqrt{3}.$$

Каждое из этих уравнений решаем введением вспомогательного угла. При этом уравнения перепишутся так:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{5}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{1{,}5}, \tag{6}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{1{,}5}. \tag{7}$$

Уравнение (5) имеет две серии решений:

$$x_m = 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z};\quad x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Уравнение (6) имеет две серии решений:

$$x_k = -\frac{\pi}{4} + \arccos\left(-\sqrt{2} + \sqrt{1{,}5}\right) + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$$

$$x_p = -\frac{\pi}{4} - \arccos\left(-\sqrt{2} + \sqrt{1{,}5}\right) + 2\pi p,\ p \in \boldsymbol{Z}.$$

Поскольку $-\sqrt{2} - \sqrt{1{,}5} < -1$, то уравнение (7) не имеет решений.

Следовательно, уравнение (4) имеет четыре серии решений: x_m, x_n, x_k и x_p.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$2 \sin x \cos x + \sin x + \cos x < 1. \tag{8}$$

Введем неизвестное $t = \sin x + \cos x$, тогда неравенство (8) превратится в квадратное неравенство с неизвестным t:

$$t^2 + t - 2 < 0. \tag{9}$$

Все решения неравенства (9) есть все t из промежутка $-2 < t < 1$. Следовательно, множество всех решений неравенства (8) совпадает с множеством решений двойного неравенства

$$-2 < \sin x + \cos x < 1. \tag{10}$$

Вводя вспомогательный угол, перепишем неравенство (10) в виде

$$-\sqrt{2} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{11}$$

Левое неравенство выполняется для любого действительного числа x. Следовательно, все решения неравенства (11) совпадают со всеми решениями неравенства

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{12}$$

Все решения неравенства (12) задаются условиями

$$2\pi n - \frac{5\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Отсюда получаем, что все решения неравенства (8) есть серия интервалов

$$\left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi n;\ 2\pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

11.55 В каком случае при решении тригонометрических уравнений и неравенств удобно применять замену неизвестного:
а) $\sin x + \cos x = t$; б) $\sin x - \cos x = t$?
Выразите $\sin x \cos x$ через t в случаях а) и б).

Решите уравнение (11.56—11.58):

11.56 а) $2 \sin x \cos x + \sin x + \cos x = 1$;
б) $2 \sin x \cos x - \sin x - \cos x = 1$;
в) $2 \sin x \cos x + \sin x - \cos x = 3$;
г) $2 \sin x \cos x - \sin x + \cos x = -1$.

11.57 а) $\sin 2x + 3 \sin x + 3 \cos x = \frac{3}{4}$;

б) $\sin 2x - 3 \sin x - 3 \cos x = \frac{3}{4}$;

в) $\sin 2x + 5 \sin x + 5 \cos x = 1\frac{3}{4}$;

г) $\sin 2x - 5 \sin x - 5 \cos x = -3\frac{1}{4}$.

11.58* а) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin 2x + 1$; б) $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin 2x - 1$.

11.59* Решите неравенство:
а) $\sin 2x - 3 \sin x - 3 \cos x + 3 < 0$;
б) $\sin 2x - \sin x - \cos x - 1 < 0$;
в) $\sin 2x - 3 \sin x + 3 \cos x - 3 < 0$;
г) $\sin 2x + \sin x - \cos x + 1 > 0$.

Исторические сведения

Слово «тригонометрия» (от греческих слов «тригон» — треугольник и «метрео» — измеряю) означает «измерение треугольников». Возникновение тригонометрии связано с развитием астрономии и географии.

Начала тригонометрии обнаружены в сохранившихся документах Древнего Вавилона, сведения тригонометрического характера встречаются и в старинных памятниках других народов древности.

Древнегреческие ученые впервые поставили перед собою задачу решения прямоугольного треугольника, т. е. определения его элементов по трем данным элементам, среди которых хотя бы один — сторона треугольника. Для решения этой задачи Гиппарх (II в. до н. э.) и Птолемей (II в. до н. э.) составили таблицы длин хорд, соответствующих различным центральным углам круга постоянного радиуса (через каждые полградуса до 180°).

Понятия синуса, косинуса и тангенса угла возникли в геометрии и астрономии. По существу, ими оперировали еще древние математики, рассматривая отношения отрезков в треугольниках и окружностях. Древнегреческий ученый Клавдий Птолемей для своих астрономических исследований составил подробную, весьма точную таблицу синусов углов, в течение многих веков служившую средством для решения треугольников.

В XI—XIII вв. в трудах математиков Средней Азии, Закавказья, Ближнего Востока и Индии началось формирование тригонометрии как отдельной науки. У индийских ученых линия синусов именовалась «архаджива», что буквально означало «половина тетивы лука». Для угла α линия синусов — это хорда единичной окружности, соответствующая центральному углу 2α. Ее длина равна $2\sin\alpha$. В Индии были составлены таблицы значений синусов для всех углов от 0 до 90° через каждые 3°45′. Эти таблицы были точнее таблиц Птолемея. Об их высокой точности говорит тот факт, что для синуса и косинуса 3°45′ были вычислены значения $\frac{100}{1529}$ и $\frac{466}{467}$, отличающиеся от истинных менее чем на 0,00000001.

Косинус индийцы называли «котиджива», т. е. синус остатка (до четверти окружности). В XV в. немецкий ученый Иоганн Мюллер (1436—1476), известный в науке под именем Региомонтан, как и другие математики, применял для понятия «косинус дуги x» латинский термин sinus complementi, т. е. синус дополнения, имея в виду $\sin(90° - x)$. От перестановки этих слов и сокращения одного из них (co-sinus) образовался термин «косинус», встречающийся в 1620 г. у английского астронома Э. Гунтера, изобретателя счетной линейки.

В IX—X вв. ученые стран Средней Азии (ал-Хабаш, ал-Баттани, Абу-л-Вефа и др.) ввели новые тригонометрические величины: тангенс и котангенс, секанс и косеканс. Понятия «тангенс» и «котангенс», как и первые таблицы этих новых тригонометрических величин, родились не из рассмотрения тригонометрической окружности, а из учения о солнечных часах. Происхождение названия функции тангенс (термин введен в 1583 г. немецким математиком Т. Финком), связано с геометрическим его представлением в виде отрезка прямой. Латинское слово tangens означает *касающийся* (отрезок касательной). Термин «котангенс» был образован в средние века по аналогии с термином «косинус». Все три термина вырабатывались на протяжении веков и вошли во всеобщее употребление в первой половине XVII в.

В дальнейшем потребности географии, геодезии, военного дела способствовали развитию тригонометрии. Особенно усиленно шло ее развитие в средневековое время, в первую очередь на юго-востоке: в Индии (Ариабхата, Брамагупта, Бхаскара), в Узбекистане, Азербайджане и Таджикистане (Насир ад-Дин ат-Туси, ал-Каши, ал-Бируни), в Арабии (Ахмад Ибн-Абдаллах, ал-Баттани), а затем и в Европе (Пейрбах, Иоганн Мюллер, Коперник, Рети). Большая заслуга в формировании тригонометрии как отдельной науки принадлежит азербайджанскому ученому Насир ад-Дину ат-Туси (1201—1274), написавшему «Трактат о полном четырехстороннике».

Творения ученых этого периода привели к выделению тригонометрии как нового самостоятельного раздела науки. Однако в их трудах еще не была введена необходимая символика, и поэтому развитие тригонометрии происходило очень медленно.

Позднее и в Европе появились работы, посвященные вопросам тригонометрии. В 1595 г. был написан труд немецкого богослова-математика Варфоломея Питискуса «Тригонометрия, или Краткий обзорный трактат о решении треугольников», в котором был впервые введен термин «тригонометрия». В XV в. Региомонтан издал «Пять книг о треугольниках всех видов». Этот труд сыграл важную роль в развитии тригонометрии. В XV—XVII вв. в Европе было составлено и издано несколько тригонометрических таблиц. Над их составлением работали Н. Коперник (1473—1543), И. Кеплер (1571—1630), Ф. Виет (1540—1603) и др. В России первые тригонометрические таблицы были изданы под названием «Таблицы логарифмов, синусов и тангенсов к научению мудролюбивых тщателей» (1703). В издании этих таблиц участвовал Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1739).

Современный вид тригонометрия получила в трудах Леонарда Эйлера (1707—1783). Он, в частности, вывел все тригонометрические формулы из нескольких основных, установил несколько неизвестных до него формул, ввел единообразные знаки. Впервые в его трудах встречается запись $\sin x$ и др., доступно изложен вопрос о знаках тригонометрических функций в каждом квадранте, установлены формулы приведения.

Уже во «Введении в анализ бесконечных» (1748) Л. Эйлер впервые трактует синус, косинус и т. д. не как тригонометрические линии, обязательно связанные с окружностью, а как тригонометрические функции, которые он рассматривал как числовые величины.

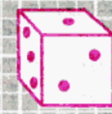
Понимая аргумент тригонометрической функции не только как угол или дугу, а как любую числовую величину, Л. Эйлер впервые стал систематически излагать тригонометрию аналитическим путем. До него каждая тригонометрическая теорема доказывалась отдельно на основании соответствующего каждому случаю геометрического чертежа. Эйлер же выводил теоремы, исходя из небольшого числа основных соотношений.

До Эйлера совсем редко рассматривались тригонометрические функции дуг, превышающих π. Лишь в его трудах разрабатывается учение о тригонометрических функциях любого аргумента. На основании трудов Л. Эйлера были составлены учебники тригонометрии, излагавшие ее в строгой научной последовательности.

Глава III

Элементы теории вероятностей

$$P(A) = \frac{m}{n}$$



§ 12. Вероятность события

Результат (исход) опыта или наблюдения называют **событием**. Пусть производится опыт, в результате которого может произойти или не произойти некоторое событие; такие события называют **случайными** (или **возможными**) **событиями**.

Теория вероятностей — раздел математики, изучающий случайные события. Здесь приводится элементарное введение в теорию вероятностей.

Далее будем рассматривать только случайные события, но для упрощения речи будем писать просто «события», опуская прилагательное «случайные».

Говоря о событиях, будем иметь в виду, что эти события связаны с одним вполне определенным опытом.

12.1. Понятие вероятности события

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующий опыт: на стол бросается монета (предполагается, что монета идеальная, т. е. она правильной формы и состоит из однородного металла).

В результате опыта на верхней поверхности упавшей на стол монеты обязательно будет либо герб, либо решка.

Появление герба назовем событием A, а появление решки — событием B. Так как нет никаких оснований предполагать, что одно из событий A и B может произойти предпочтительнее, чем другое, то события A и B называют равновозможными.

В результате рассматриваемого опыта обязательно произойдет одно и только одно из событий A и B, и эти события A и B равновозможны. Такие события назовем случаями.

Вероятность события A определим как отношение числа случаев, благоприятствующих этому событию (т. е. появлению герба, а таких случаев 1), к числу всех рассматриваемых случаев (таких случаев 2).

Вероятность события A принято обозначать $P(A)$ (буква P — первая буква в слове Probabilitas — вероятность), поэтому

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что вероятность $P(B)$ события B также равна $\frac{1}{2}$:

$$P(B) = \frac{1}{2}.$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим другой опыт: на стол бросается кубик, на гранях которого отмечены очки 1, 2, ..., 6 (предполагается, что кубик идеальный, т. е. это куб, состоящий из однородного материала), назовем такой кубик игральной костью.

В результате опыта на верхней грани упавшей на стол игральной кости обязательно будет или 1, или 2, или 3, или 4, или 5, или 6 очков. Появление i очков ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), или, как говорят, выпадание i очков, назовем событием A_i. Так как нет никаких оснований предполагать, что одно из событий A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 может произойти предпочтительнее, чем любое другое, то эти события называют равновозможными.

В результате рассматриваемого опыта обязательно произойдет одно и только одно из событий A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, и эти события равновозможны; такие события назовем случаями.

Событию A_1 благоприятствует только один случай, а именно выпадание одного очка.

Вероятность $P(A_1)$ события A_1 определим как отношение числа случаев, благоприятствующих ему, к общему числу случаев:

$$P(A_1) = \frac{1}{6}.$$

Очевидно, что вероятность $P(A_i)$ события A_i также равна $\frac{1}{6}$:

$$P(A_i) = \frac{1}{6},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6.$$

Рассмотрим в том же опыте еще события A, B, C и D: событие A заключается в том, что при бросании игральной кости выпадает 6 очков, событие B — выпадает четное число очков, событие C — выпадает или 3, или 5 очков, событие D — выпадает или 1, или 2, или 3, или 4, или 5, или 6 очков.

Вероятность любого из этих событий определим как отношение числа случаев, благоприятствующих ему, к общему числу случаев.

Очевидно, что событию A благоприятствует один случай — выпадание 6 очков, событию B благоприятствуют три случая — выпадание или 2, или 4, или 6 очков, событию C благоприятствуют два случая — выпадание или 3, или 5 очков, событию D благоприятствуют шесть случаев — выпадание или 1, или 2, или 3, или 4, или 5, или 6 очков, поэтому

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(D) = \frac{6}{6} = 1.$$

ПРИМЕР 3. Ученика попросили назвать какое-либо натуральное число, не превышающее 30. Какова вероятность того, что он назовет число, делящееся на 3? не делящееся на 3?

Пусть событие A заключается в том, что будет названо число, делящееся на 3, событие B заключается в том, что будет названо число, делящееся на 3 с остатком 1, событие C заключается в том, что будет названо число, делящееся на 3 с остатком 2. События A, B, C таковы, что обязательно происходит одно и только одно из этих событий. Событию A благоприятствует 10 случаев из 30, поэтому $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, т. е. ученик назовет число, делящееся на 3, с вероятностью, равной $\frac{1}{3}$.

Пусть событие D заключается в том, что будет названо число, не делящееся на 3. Событию D благоприятствуют 20 случаев из 30, поэтому $P(D) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$, т. е. ученик назовет число, не делящееся на 3, с вероятностью, равной $\frac{2}{3}$.

В любом опыте:

а) события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют **единственно возможными**, если в этом опыте обязательно происходит одно и только одно из них;

б) события $C_1, C_2, \ldots, C_n$ называют **равновозможными**, если в этом опыте нет никаких оснований предполагать, что одно из них может произойти предпочтительнее, чем любое другое;

в) событие называют **достоверным**, если в результате этого опыта оно обязательно произойдет;

г) событие называют **невозможным**, если оно не может произойти в этом опыте;

д) события A и B называют **несовместными**, если они не могут произойти одновременно в этом опыте, или, как говорят, одно из событий A и B исключает другое;

е) события $B_1, B_2, \ldots, B_q$ называют **несовместными**, если каждая пара из них несовместна в этом опыте.

Отметим, что если события единственно возможны, то они, в частности, несовместны.

В примере 2 события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 единственно возможны и равновозможны, события A_1, A_3, A_5, B единственно возможны, но не равновозможны, события B и C несовместны, событие D — достоверное, событие E — «выпало 7 очков» — невозможное.

Теперь рассмотрим опыт, в результате которого обязательно произойдет одно и только одно из n равновозможных событий

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \tag{1}$$

т. е. события (1) единственно возможны и равновозможны. Такие события будем называть **случаями**.

В этом опыте можно еще рассмотреть события, заключающиеся в том, что произойдет один из нескольких заранее выделенных случаев. Так, в примере 2 событие B заключается в том, что происходит один из трех случаев: выпадает или 2, или 4, или 6 очков; событие C заключается в том, что происходит один из двух случаев: выпадает или 3, или 5 очков; событие A заключается в том, что происходит один случай: выпадает 6 очков.

Пусть в рассматриваемом опыте событие A заключается в том, что произойдет один из m заранее выделенных случаев (1), про эти m случаев будем говорить, что они благоприятствуют событию A.

Вероятность события A определим как отношение числа m случаев, благоприятствующих событию A, к общему числу n рассматриваемых случаев, т. е.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Если нет случаев, благоприятствующих данному событию, т. е. количество случаев, ему благоприятствующих, равно нулю ($m = 0$), то такое событие является невозможным, его обозначают $\varnothing$. Вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0.$$

Например, событие, заключающееся в том, что при бросании игральной кости выпадет 7 очков, невозможное; его вероятность равна нулю.

Если событию благоприятствуют все рассматриваемые случаи, т. е. $m = n$, то такое событие является достоверным, его обозначают Ω, его вероятность равна 1:

$$P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1.$$

Например, при бросании кости событие, заключающееся в том, что выпадет либо 1, либо 2, либо 3, либо 4, либо 5, либо 6 очков, достоверное; его вероятность равна 1.

12.1 На примере опыта с бросанием монеты объясните, что означает: выпадание герба и решки — события равновозможные; единственно возможные.

12.2 Бросают игральную кость. Являются ли события A — «выпадание шести очков» и B — «выпадание четного числа очков» равновозможными, единственно возможными?

12.3 В ящике лежат три шара, отличающиеся только цветом: белый, черный, красный. Из ящика наудачу вынимают один шар. Возможны три события: A — «вынут белый шар»,

B — «вынут черный шар», C — «вынут красный шар». Являются ли события A, B, C:
а) равновозможными; б) единственно возможными?

12.4 Бросают две монеты. Рассмотрим два события: A — «выпали два герба»; B — «выпала решка» (хотя бы на одной монете). Являются ли события A и B:
а) равновозможными; б) несовместными?

12.5 а) Какое событие называют невозможным? Как обозначают невозможное событие? Какова его вероятность?
б) Какое событие называют достоверным? Как обозначают достоверное событие? Какова его вероятность?

12.6 Укажите невозможное и достоверное события среди событий, которые могут произойти при подбрасывании двух игральных кубиков: A — «выпали две шестерки»; B — «выпало 1 очко»; C — «выпало любое число очков от двух до двенадцати».

12.7 а) Что называют вероятностью события?
б) Определите вероятность каждого из событий в заданиях **12.2—12.4**, **12.6**.

12.8 При игре в лото используются фишки с номерами от 1 до 90. Наудачу вынимается одна фишка. Какова вероятность события:
а) A — «номер вынутой фишки делится на 10»;
б) B — «номер вынутой фишки делится и на 5, и на 9»;
в) C — «номер вынутой фишки меньше 100»;
г) D — «номер вынутой фишки 77»?

12.9 Три ученицы купили билеты в театр на три соседних места. Какова вероятность того, что место первой ученицы окажется посередине, если она наудачу выберет один билет из трех?

12.10 а) Я задумал двузначное число. Какова вероятность того, что вы угадаете это число с первого раза?
б) Я задумал двузначное число, записанное разными цифрами. Какова вероятность того, что вы угадаете это число с первого раза?

12.11 Ученик задумал натуральное число не превышающее 100. Какова вероятность того, что это число: а) четное; б) делится на 4; в) делится на 10; г) при делении на 10 дает в остатке 7?

12.12 Используя некоторые из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторения, записали четырехзначное число. Какова вероятность того, что вы угадаете это число с первого раза?

12.13 Четырехзначное число записали, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5 (цифры числа могут быть одинаковые). Какова вероятность того, что вы угадаете это число с первого раза?

12.14 Один игрок записал четырехзначное число, используя различные цифры, кроме 0. Какова вероятность того, что второй игрок угадает это число с первого раза?

12.15 В ящике лежат 20 шаров, отличающихся только цветом: 7 белых и 13 черных. Из ящика наудачу вынимают один шар. Какова вероятность события:
а) A — «вынут белый шар»; б) B — «вынут черный шар»; в) C — «вынут красный шар»; г) D — «вынут белый или черный шар»?

12.16 В ящике лежат 6 белых и 8 черных шаров — из них 2 белых и 3 черных шара помечены звездочками. Из ящика наудачу вынимают один шар. Какова вероятность того, что будет вынут белый шар со звездочкой?

12.17 Четыре футбольные команды K_1, K_2, K_3, K_4 вышли в полуфинал мирового первенства. Специалисты считают, что их силы примерно равны. Какова вероятность события:
а) A — «команды K_1 и K_2 выйдут в финал»;
б) B — «команда K_1 получит «золото», а команда K_2 — «серебро»;
в) C — «команды заняли места с первого по четвертое в указанном порядке: K_4, K_1, K_3, K_2»?

12.2. Свойства вероятностей событий

В этом пункте рассматриваются события, относящиеся к одному опыту.

Суммой (объединением) событий A и B называют событие, заключающееся в том, что происходит по крайней мере одно из событий A и B (или A, или B, или оба вместе). Сумму событий A и B обозначают $A \cup B$.

ПРИМЕР 1. Если при бросании игральной кости событие A есть выпадание или 1, или 2 очков, а событие B — выпадание или 2, или 3 очков, то событие $A \cup B$ заключается в выпадании или 1, или 2, или 3 очков.

Запись $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_q$ означает событие, заключающееся в том, что происходит по крайней мере одно из событий A_1, A_2, ..., A_q.

ПРИМЕР 2. Если при бросании игральной кости событие A есть выпадание четного числа очков, событие B — выпадание числа очков, кратного 3, а событие C — выпадание числа очков, большего 4, то событие $A \cup B \cup C$ заключается в выпадании или 2, или 3, или 4, или 5, или 6 очков.

Сумму двух несовместных событий A и B будем обозначать так: $A + B$, а сумму n несовместных событий так: $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

ПРИМЕР 3. Если при бросании игральной кости событие A есть выпадание или 1, или 2 очков, а событие B — выпадание 3 очков, то события A и B несовместные, поэтому события $A + B$ есть выпадание или 1, или 2, или 3 очков.

Произведением (пересечением) событий A и B называют событие, заключающееся в том, что происходят оба события и A, и B. Произведение событий A и B обозначают $A \cap B$ или AB.

Так, в примере 1 событие $A \cap B$ заключается в выпадании 2 очков.

Запись $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_q$ (или $A_1A_2 \ldots A_q$) означает событие, заключающееся в том, что происходят все события: и A_1, и A_2, ..., и A_q.

Так, в примере 2 событие $A \cap B \cap C$ заключается в выпадании 6 очков.

Вероятности событий обладают следующими свойствами:

1. Вероятность любого события A удовлетворяет неравенствам:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

2. Вероятность достоверного события Ω равна 1:

$$P(\Omega) = 1.$$

3. Вероятность суммы несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

В самом деле, из определения, приведенного в п. 12.1, следует, что вероятность $P(A)$, т. е. дробь $\frac{m}{n}$, неотрицательна и не больше 1. Она равна нулю для невозможного события и единице для достоверного события.

Пусть событию A благоприятствует m_1 случаев, а событию B — m_2 случаев. Пусть при этом события A и B несовместны. Тогда случаи, благоприятствующие событию A, отличны от случаев, благоприятствующих событию B, и, следовательно, событию $A + B$ благоприятствует $m_1 + m_2$ случаев. Но тогда

$$P(A) + P(B) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{m_1 + m_2}{n} = P(A + B).$$

По индукции доказывается, что если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Два единственно возможных события называют **противоположными**.

Например, при бросании игральной кости события A (выпадание четного числа очков) и B (выпадание нечетного числа очков) — противоположные события; события C (выпадание 1 очка) и D (выпадание или 2, или 3, или 4, или 5, или 6 очков) — противоположные события.

Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$. Говорят также, что событие $\overline{A}$ заключается в том, что в данном опыте событие A не произойдет.

Очевидно, что события A и $\overline{A}$ несовместны, а их сумма — достоверное событие: $A + \overline{A} = \Omega$, поэтому

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Отметим еще, что события A и B несовместны, если их пересечение является невозможным событием, т. е. $AB = \varnothing$. Если события A и B несовместны, то $P(AB) = 0$.

Покажем, что справедливо равенство

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (1)$$

Обозначим через $A \backslash B$ событие, заключающееся в том, что происходит событие A, но событие B не происходит. Так как события A и $B \backslash AB$ несовместны и $A \cup B = A + B \backslash AB$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \backslash AB). \qquad (2)$$

Так как события $B \backslash AB$ и AB несовместны и очевидно, что $B = B \backslash AB + AB$, то

$$P(B) = P(B \backslash AB) + P(AB). \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3) следует равенство (1).

В примере 1 $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(AB) = \frac{1}{6}$, поэтому по формуле (1)

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

ПРИМЕР 4. Имеется 36 игральных карт. Из колоды наудачу вынимают одну карту. Какова вероятность, что будет вынута или козырная карта, или туз?

Пусть событие A заключается в том, что вынута козырная карта, событие B — «вынут туз». Тогда событие $A \cup B$ — «вынута или козырная карта, или туз», а событие AB — «вынут козырной туз». Ясно, что $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{4}{36}$, $P(AB) = \frac{1}{36}$, поэтому по формуле (1)

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{4}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}.$$

12.18 а) Что называют суммой (объединением) событий A и B? Как обозначают сумму событий A и B? Как обозначают сумму несовместных событий A и B?

б) Бросают игральный кубик. Событие A заключается в выпадании или 3, или 4 очков, событие B — в выпадании или 4, или 5 очков. В чем заключается событие $A \cup B$?

в) Бросают игральный кубик. Событие A заключается в выпадании или 3, или 4 очков, событие B — в выпадании или 5, или 6 очков. В чем заключается событие $A + B$?

12.19 а) Что называют произведением (пересечением) событий A и B? Как обозначают произведение событий A и B?

б) Бросают игральный кубик. Событие A заключается в выпадании или 3, или 4 очков, событие B — в выпадании или 4, или 5 очков. В чем заключается событие $A \cap B$?

в) Бросают игральный кубик. Событие A заключается в выпадании или 3, или 4 очков, событие B — в выпадании или 5, или 6 очков. В чем заключается событие $A \cap B$?

12.20 а) Какое событие называют противоположным данному событию A?

б) Как обозначают событие, противоположное событию A?

в) Какими свойствами обладают вероятности событий?

г) Каким неравенствам удовлетворяет вероятность любого события?

12.21 В чем заключается событие $\overline{A}$, если событие A есть:

а) выпадание герба при бросании монеты;

б) выпадание шести очков при бросании игральной кости?

12.22 Бросают игральный кубик. Событие A заключается в выпадании или 5, или 6 очков; событие B заключается в выпадании четного числа очков. В чем заключаются события $A \backslash B$ и $B \backslash A$? Вычислите вероятности $P\ (A \backslash B)$ и $P\ (B \backslash A)$.

12.23 Бросают игральный кубик. События A, B, C, D заключаются в выпадании числа очков: четного (событие A); кратного 3 (событие B); не равного 5 (событие C); не равного или 5, или 1 (событие D). Верно ли, что:

а) $A \cup B = C$; б) $A \cup B = D$; в) $C \cap D = D$; г) $C \cap A = A$?

12.24 Однажды к Галилео Галилею явился солдат и спросил о том, какая сумма выпадает чаще при бросании трех игральных костей — 9 или 10? Галилей правильно решил эту задачу. Что ответил Галилей?

12.25 В некотором царстве, в некотором государстве живут правдолюбцы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые могут лгать или говорить правду, но не любят признаваться в этом. Для получения правдивой информации о количестве лжецов было проведено такое исследование. Каждого испытуемого спрашивали: «Вы лжец?» Прежде чем ответить, испытуемый подбрасывал монету так, чтобы результат этого опыта был виден только ему одному. Если выпадал герб, то он должен был сказать «да» (независимо от того, кем он является на самом деле). Если же выпадала решка, то он должен был правдиво ответить на вопрос (в этом случае исследователи не могли знать, кем на самом деле является испытуемый, так как они не знали результата опыта с монетой). В результате исследования выяснилось, что 61% граждан царства-государства ответили «да», остальные — «нет». Сколько процентов граждан этого царства-государства являются лжецами, если были опрошены все граждане?

12.26 Имеется 16 игральных карт: 4 валета, 4 дамы, 4 короля и 4 туза. Из колоды наудачу вынимают одну карту. Какова вероятность, что будет вынута или козырная карта, или дама?

12.27 Имеется колода из 52 игральных карт. Из колоды наудачу вынимают одну карту. Какова вероятность, что будет вынута или козырная карта, или дама?

§ 13*. Частота. Условная вероятность

13.1*. Относительная частота события

Пусть в результате опыта может произойти событие A, имеющее вероятность $p = P(A)$, $0 < p < 1$. Повторим опыт n раз, и пусть при этом событие A произойдет m раз. Число $\frac{m}{n}$ называют **относительной частотой события** A.

Имеет место замечательный факт, заключающийся в том, что при больших n относительная частота события группируется возле числа p: $\frac{m}{n} \approx p$, иными словами, при достаточно больших n величина $\frac{m}{n}$ мало отличается от p.

Математики Ж. Бюффон и К. Пирсон провели многократные опыты с бросанием монеты. Их результаты приведены в таблице 3.

Таблица 3

	Число бросаний	Число выпадений герба	Относительная частота выпадения герба
Бюффон	4040	2048	0,5085
Пирсон	12 000	6019	0,5046
Пирсон	24 000	12 012	0,5005

Как видно из таблицы, относительная частота выпадения герба, полученная в опытах Бюффона и Пирсона, мало отличается от вероятности выпадания герба в указанном эксперименте, равной 0,5.

Не всегда удается определить вероятность p события априори (от лат. a priori — независимо от опыта), как это имеет место с бросанием монеты или игральной кости. Но если возможно опыт повторить n раз, то при большом n относительная частота события $\frac{m}{n}$ может рассматриваться как приближенное значение вероятности $\left(\frac{m}{n} \approx p\right)$ этого события.

При большом количестве опытов относительная частота события, как правило, мало отличается от вероятности этого события. Эту закономерность называют **статистической устойчивостью относительных частот.**

Отметим, что, чем больше проводится опытов, тем реже встречается сколько-нибудь значительное отклонение относительной частоты от вероятности.

Замечание. Если относительную частоту события принять по определению за приближенное значение вероятности этого события, то получим так называемое статистическое определение вероятности.

Приведенное в п. 12.1 определение вероятности событий называют классическим определением вероятности.

Существует еще и аксиоматическое определение вероятности, в котором определение вероятности задается перечислением ее свойств. При аксиоматическом определении вероятность задается как функция $P(A)$, определенная на множестве M всех событий, определяемых данным опытом, которая (для опытов с конечным числом исходов) удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ для любого события A из M;
2) $P(A) = 1$, если A — достоверное событие;
3) $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если события A и B несовместны.

Теорию, изучающую вероятность событий лишь для опытов с конечным числом исходов, называют **элементарной теорией вероятностей.**

Конечно, существуют и опыты с бесконечным числом возможных событий. Теорию, изучающую вероятность таких событий, называют **общей теорией вероятностей.**

В общей теории вероятностей свойство 3 понимается в расширенном смысле:

$$P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots .$$

Свойства 1—3 называют аксиомами Колмогорова теории вероятностей. Именно А. Н. Колмогоров впервые в 1933 г. дал аксиоматическое построение теории вероятностей.

13.1 Проведите опыт с бросанием монеты 50 раз. Вычислите относительную частоту выпадания герба. Сравните свой результат с результатами других учащихся вашего класса.

13.2 Проведите опыт с бросанием игральной кости 60 раз. Вычислите относительную частоту каждого из событий: A — «выпадание шести очков»; B — «выпадание четного числа очков».

13.3 Пятеро учащихся при бросании монеты 50 раз получили следующие данные (табл. 4):

Таблица 4

Ученик	Число бросаний	Число выпаданий герба	Относительная частота выпадания герба
1	50	27	0,54
2	50	28	0,56
3	50	23	0,46
4	50	26	0,52
5	50	24	0,48

Вычислите относительную частоту выпадания герба во всех 250 опытах.

13.2*. Условная вероятность. Независимые события

ПРИМЕР 1. Пусть брошена игральная кость и стало известно, что произошло событие A — выпало не меньше пяти очков. Какова при этом условии вероятность события B, заключающегося в том, что выпало 6 очков?

Если бы мы не знали, что произошло событие A, то вероятность события B была бы равна $\frac{1}{6}$. Однако в задаче имеется дополнительная информация о том, что выпало или 5, или 6 очков, поэтому при этом дополнительном условии вероятность события B равна $\frac{1}{2}$. Такую вероятность называют условной вероятностью события B при условии, что произошло событие A.

Пусть в результате опыта могут произойти n равновозможных и единственно возможных событий, которые мы называем случаями, а событиям A, B, AB благоприятствуют соответственно m_1, m_2, l из этих случаев.

Легко видеть, что если рассмотреть только m_1 ($m_1 \neq 0$) случаев, благоприятствующих событию A, то случаи, благоприятствующие событию AB, имеются только в этих m_1 случаях (это будут те из них, каждый из которых благоприятствует еще и событию B).

Условной вероятностью события B при условии, что произошло событие A, называют отношение числа случаев, благоприятствующих событию AB, к числу случаев, благоприятствующих событию A.

Условную вероятность события B при условии, что произошло событие A, обозначают $P_A(B)$. Поэтому $P_A(B) = \dfrac{l}{m_1}$.

ПРИМЕР 2. Вам нужно угадать номер квартиры вашего друга, живущего в доме, в котором квартиры имеют номера с 1 по 40. Вам известно лишь, что номер квартиры друга делится на 8. Какова вероятность того, что вы угадаете нужный номер с первого раза?

Пусть событие A_i — «номер квартиры i», $i = 1, 2, \ldots, 40$. Ясно, что событий A_i всего 40, все они равновозможны и единственно возможны, следовательно, имеется 40 случаев:

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{40}. \tag{1}$$

Пусть событие A — «номер квартиры делится на 8». Этому событию благоприятствуют 5 из сорока случаев (1):

$$A_8,\ A_{16},\ A_{24},\ A_{32},\ A_{40}. \tag{2}$$

Пусть событие B — «нужный номер квартиры». Этому событию благоприятствует только один из пяти случаев (2).

Поэтому $P_A(B) = \dfrac{1}{5}$, т. е. вероятность того, что вы угадаете нужный номер с первого раза, зная, что номер этой квартиры делится на 8, равна $\dfrac{1}{5}$. Отметим, что если бы не было этой дополнительной информации, то вероятность угадать нужный номер была бы равна $\dfrac{1}{40}$.

Так как вероятность события AB равна $\dfrac{l}{n}$, то можно записать, что $P(AB) = \dfrac{l}{n} = \dfrac{m_1}{n} \cdot \dfrac{l}{m_1}$.

Множитель $\dfrac{m_1}{n}$ есть вероятность события A, а второй множитель — условная вероятность события B при условии, что произошло событие A. Следовательно, верно равенство

$$P(AB) = P(A)\,P_A(B).$$

Аналогично показывается, что верно равенство

$$P(AB) = P(B)\,P_B(A).$$

Если $P(B) > 0$, то $P_B(A) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

Это означает, что условную вероятность события A при условии, что произошло событие B, можно было определить как отношение вероятности события AB к вероятности события B.

Если B — невозможное событие, т. е. $P(B) = 0$ ($m_2 = 0$), то принято считать, что $P_B(A) = 0$.

ПРИМЕР 3. Пусть при бросании игральной кости событие A — выпадание четного числа очков, событие B — выпадание или 4, или 5, или 6 очков, событие C — выпадание 3 очков.

Тогда событие AB есть выпадание или 4, или 6 очков и $P(AB)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. События AC и BC невозможные события, поэтому $P(AC)=0$, $P(BC)=0$.

Так как $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, то $P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ и $P_A(C)=$ $=\frac{P(AC)}{P(A)}=0$. Так как $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, то $P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ и $P_B(C)=\frac{P(BC)}{P(B)}=0$.

Иногда вероятность $P(A)$ называют безусловной вероятностью, чтобы отличать ее от условной вероятности $P_B(A)$. Рассмотрим случай, когда $P_B(A)=P(A)$, т. е. случай, когда условная вероятность события A совпадает с безусловной вероятностью события A, т. е. когда на самом деле условная вероятность события A не зависит от того, произошло или не произошло событие B. В этом случае $P(AB)=P(A)P(B)$. В случае, когда $P_A(B)=P(B)$, также справедливо равенство $P(AB)=P(A)P(B)$.

События A и B (в рассматриваемом опыте) называют **независимыми**, если справедливо равенство

$$P(AB)=P(A)P(B). \qquad (3)$$

ПРИМЕР 4. Пусть одновременно бросают две монеты. Пусть событие A — это выпадание на первой монете герба, а на второй или герба, или решки, событие B — это выпадание на второй монете герба, а на первой или герба, или решки. Покажем, что эти события независимы.

При бросании двух монет возможны только следующие случаи (табл. 5):

Таблица 5

Случай	Первая монета	Вторая монета
1	Герб	Герб
2	Герб	Решка
3	Решка	Герб
4	Решка	Решка

Значит, всего (равновозможных и единственно возможных) случаев четыре. Из них событию A благоприятствуют случаи 1 и 2, а событию B — случаи 1 и 3. Тогда

$$P(A)=P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Событие $C = AB$ — это выпадание герба на каждой монете. Этому событию благоприятствует только один случай 1. Значит,

$$P(C) = \frac{1}{4}.$$

Теперь очевидно, что $P(AB) = P(A)\,P(B)$. Справедливость этого равенства означает, что события A и B независимы.

В практических вопросах для определения независимости событий редко обращаются к проверке равенства (3). Обычно для этого пользуются интуитивными соображениями, основанными на опыте. Хотя в примере 4 на основании равенства (3) показано, что события A и B независимы, но интуитивно ясно, что выпадание герба на одной монете не изменяет вероятности выпадания герба на другой монете, т. е. эти события независимы и по интуитивным соображениям. Поэтому в практических вопросах независимость событий заранее оговаривают.

ПРИМЕР 5. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком 0,6, а вторым — 0,5. Считая, что попадание в мишень каждого из стрелков является независимым событием (т. е. вероятность попадания в мишень каждым стрелком не зависит от попадания или непопадания в мишень другим стрелком), определим вероятность попадания в мишень обоими стрелками; хотя бы одним стрелком.

Пусть событие A есть поражение мишени первым стрелком, B — вторым стрелком. Тогда событие AB есть поражение мишени обоими стрелками, событие $A \cup B$ — хотя бы одним стрелком. Так как $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ и события A и B независимые, то по равенству (3)

$$P(AB) = P(A)\,P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3.$$

Применяя формулу (1) (см. п. 12.2), получим

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}8.$$

Следовательно, вероятность попадания в мишень обоими стрелками равна 0,3, а хотя бы одним стрелком — 0,8.

13.4 Что называют условной вероятностью события B при условии, что произошло событие A? Как обозначают эту условную вероятность?

13.5 Пусть бросают игральную кость. Событие A заключается в выпадании не более 4 очков, событие B — в выпадании нечетного числа очков. Вычислите вероятность: а) $P(A)$; б) $P(B)$; в) $P_B(A)$; г) $P_A(B)$.

13.6 В ящике находятся 15 шаров: 7 белых и 8 черных, из них 3 белых шара и 2 черных помечены звездочками. Опыт состоит в том, что из ящика наугад вынимают один шар. Событие A заключается в том, что вынут белый шар, событие B — «вынут черный шар», событие C — «вынут шар, помеченный звездочкой». Вычислите вероятность:

а) $P(A)$; б) $P(B)$; в) $P(C)$; г) $P_C(A)$;
д) $P_C(B)$; е) $P_A(C)$; ж) $P_B(C)$; з) $P_B(A)$.

13.7 В условиях предыдущей задачи определите, являются ли независимыми события: а) A и B; б) A и C; в) B и C.

13.8 В некотором опыте события A и B независимы и известны вероятности $P(AB) = 0{,}01$, $P(B) = 0{,}2$. Вычислите вероятность $P(A)$.

13.9 На предприятии имеются два устройства, подающие сигнал в случае аварии оборудования. Вероятность того, что в случае аварии подаст сигнал первая сигнализация, равна 0,95, а вероятность того, что вторая, — 0,90. Считая, что подача сигнала первым и вторым устройствами — независимые события, найдите вероятность того, что при аварии подаст сигнал хотя бы одна из сигнализаций.

13.10 Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,7, вторым — 0,8. Считая, что поражения мишени каждым из стрелков являются независимыми событиями, найдите вероятность события, заключающегося в том, что:

а) мишень поразят оба стрелка;
б) мишень поразит первый стрелок, но не поразит второй;
в) мишень поразит второй стрелок, но не поразит первый;
г) мишень не поразит ни один из стрелков;
д) мишень поразит хотя бы один из стрелков.

§ 14*. Математическое ожидание. Закон больших чисел

14.1*. Математическое ожидание

Пусть в результате опыта происходит m единственно возможных событий $B_1, B_2, \dots, B_m$, имеющих вероятности $p_1, p_2, \dots, p_m$ соответственно, причем $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Пусть имеется некоторая функция, связанная с этими событиями следующим образом: каждому событию B_i она ставит в соответствие вполне определенное число x_i. Тогда говорят, что определена

случайная величина x, которая принимает значения x_i с вероятностью p_i.

Математическим ожиданием случайной величины x называют число, обозначаемое $M(x)$, равное сумме произведений значений случайной величины на вероятности этих значений, т. е.

$$M(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i.$$

Если значения случайной величины x имеют одну и ту же вероятность p, то

$$mp = 1, \quad M(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i, \tag{1}$$

т. е. в этом случае математическое ожидание случайной величины x равно среднему арифметическому ее значений.

Говорят, что **математическое ожидание случайной величины есть среднее взвешенное (вероятностями) ее значений.**

Математическое ожидание называют еще средним значением случайной величины. Говорят и так: математическое ожидание случайной величины есть ее **значение в среднем.**

ПРИМЕР 1. Бросают игральную кость. Найдем математическое ожидание величины x — числа выпавших очков.

Случайная величина x принимает значения, равные числу выпавших очков, т. е. значения 1, 2, ... , 6, причем каждое с вероятностью $\frac{1}{6}$. По формуле (1)

$$M(x) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \ldots + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1}{6}(1 + 2 + \ldots + 6) = 3{,}5,$$

т. е. при любом бросании игральной кости в среднем выпадает 3,5 очка.

Следовательно, искомое математическое ожидание равно 3,5.

ПРИМЕР 2. Два стрелка стреляют по мишени, состоящей из трех областей. Попадание в первую область дает стрелку 3 очка, во вторую — 2 очка, в третью — 1 очко, непопадание в мишень — 0 очков. Законы распределения вероятности числа выбитых очков для каждого из стрелков заданы таблицами 6 и 7, где x — число очков, выбитых первым стрелком, y — вторым. Определим, какой стрелок в среднем лучше стреляет по этой мишени.

Таблица 6

x_i	3	2	1	0
p_i	0,5	0,1	0,2	0,2

Таблица 7

y_i	3	2	1	0
p_i	0,3	0,55	0,1	0,05

Сравним искусство стрельбы стрелков по данной мишени по числу очков, выбиваемых в среднем каждым стрелком, т. е. сравним математические ожидания: $M(x) = 3 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}2 = 1{,}9$ и $M(y) = 3 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}55 + 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}05 = 2{,}1$. Второй стрелок в среднем выбивает больше очков, т. е. второй стрелок стреляет в среднем лучше.

Понятие математического ожидания возникло в связи с изучением азартных игр. Приведем примеры.

ПРИМЕР 3. Игрок вносит в банк игорного дома 500 р. Бросают игральную кость. По правилам игры игрок может получить 900 р., если случится событие A_1 — выпадет 6 очков; 600 р., если случится событие A_2 — выпадет или 4, или 5 очков; 0 рублей, если случится событие A_3 — выпадет или 1, или 2, или 3 очка.

Будем считать, что игрок получает x рублей, т. е. x — случайная величина, которая может принимать значения $x_1 = 900$, $x_2 = 600$, $x_3 = 0$ соответственно с вероятностями

$$p_1 = p(A_1) = \frac{1}{6},\ p_2 = p(A_2) = \frac{1}{3},\ p_3 = p(A_3) = \frac{1}{2},$$

где $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Математическое ожидание случайной величины x равно

$$M(x) = 900 \cdot \frac{1}{6} + 600 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} = 350.$$

Математическое ожидание очень важный показатель игры. Многочисленные опыты показывают, что число $M(x) = 350$ в нашем случае есть та сумма, которую в среднем игорный дом выплачивает каждому игроку. Но это означает, что каждый игрок в среднем теряет 150 р.

ПРИМЕР 4. Игрок вынимает из колоды (в 36 карт) одну карту. Он получает (т. е. выигрывает) 10 р., если вынет бубнового туза, 5 р., если вынет бубнового короля, и кладет на стол 1 р. (т. е. проигрывает, но можно сказать, что выигрывает -1 р.) в остальных случаях.

Будем считать, что игрок получает x р., где x есть случайная величина, которая может принимать значения $x_1 = 10$, $x_2 = 5$, $x_3 = -1$ соответственно с вероятностями $\frac{1}{36}, \frac{1}{36}, \frac{34}{36}$.

Математическое ожидание величины x равно

$$M(x) = 10 \cdot \frac{1}{36} + 5 \cdot \frac{1}{36} + (-1) \cdot \frac{34}{36} = -\frac{19}{36}.$$

Это означает, что каждый игрок в среднем теряет $\frac{19}{36}$ р.

ПРИМЕР 5. Задача Паскаля. Два игрока A и B согласились, что в их игре вся ставка достанется тому, кто первый выиграет 5 партий. Но игра оказалась прерванной, когда игрок A имел 4 выигрыша, а игрок B — 3 выигрыша. В каком отношении игроки должны разделить ставку в этой прерванной игре (в каждой партии выигрывает один из игроков — ничьих нет; вероятность выигрыша каждого игрока в одной партии считается равной 0,5)?

Рассмотрим, какие случаи могли бы произойти, если бы игроки сыграли еще две партии (независимо от их первоначальной договоренности):

1) игрок B выиграет обе партии; 2) игрок B выиграет первую партию, но проиграет вторую; 3) игрок B проиграет первую партию, но выиграет вторую; 4) игрок B проиграет обе партии.

По первоначальному соглашению всю игру выиграет первый игрок в трех из этих четырех случаев, второй — лишь в одном. Следовательно, вероятность события A (игрок A выиграл всю игру) равна $\frac{3}{4}$, а вероятность события B (игрок B выиграл всю игру) равна $\frac{1}{4}$.

Если ставка равна C р., то игрок A получил бы x_A р., где x_A — случайная величина, которая принимает значение C с вероятностью $\frac{3}{4}$ и значение 0 с вероятностью $\frac{1}{4}$, а игрок B получил бы x_B р., где x_B — случайная величина, которая принимает значение C с вероятностью $\frac{1}{4}$ и значение 0 с вероятностью $\frac{3}{4}$.

Найдем математическое ожидание величин x_A и x_B, т. е. найдем, сколько в среднем получил бы каждый игрок:

$$M(x_A) = C \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}C; \quad M(x_B) = C \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}C.$$

Следовательно, в среднем игроки разделили бы ставку в отношении 3 : 1, поэтому ставку надо разделить в отношении $M(x_A) : M(x_B)$, т. е. в отношении 3 : 1.

14.1 Рулетка имеет 38 номеров, выпадание каждого из которых единственно возможно и равновозможно. Если выпадет номер, на который поставил игрок, то он получает свою ставку обратно, плюс ту же сумму в 35-кратном размере, если нет, то теряет свою ставку. Определите, сколько в среднем получает каждый игрок в одной игре при ставке в 19 рублей.

14.2 Два стрелка стреляют по мишени, состоящей из трех областей. Попадание в первую область дает стрелку 5 очков, во вторую — 10 очков, в третью — 20 очков. Законы распределения числа выбитых очков для каждого из них заданы таблицами 8 и 9, где x — число очков, выбитых первым стрелком, y — вторым. Определите, какой стрелок лучше в среднем стреляет по этой мишени.

Таблица 8

x_i	5	10	20
p_i	0,3	0,4	0,3

Таблица 9

y_i	5	10	20
p_i	0,2	0,6	0,2

Будем называть игру справедливой, если в среднем будет одинаковым число очков или денег, получаемых каждым игроком. Определите, является ли справедливой игра, описанная в следующей задаче **(14.3—14.6)**:

14.3 Подбрасываются две монеты. Игрок A получает 3 очка, если выпадают два герба, 0 очков в других случаях. Игрок B получает 2 очка, если выпадают герб и решка, 0 очков в других случаях.

14.4 Подбрасываются две монеты. Игрок A получает 2 очка, если выпадают два герба, 0 очков в других случаях. Игрок B получает 1 очко, если выпадают герб и решка, 0 очков в других случаях.

14.5 Подбрасываются две игральные кости. Игрок A получает 6 очков, если выпадает сумма, не большая 7 очков, 0 очков в других случаях. Игрок B получает 7 очков, если выпадает сумма, большая 7 очков, 0 очков в других случаях.

14.6 Игрок делает ставку и подбрасывает игральную кость. Если выпадает 6 очков, то игрок получает свою ставку в n-кратном размере. Если нет — сделанная ставка достается игорному дому. Рассмотрите случаи:

а) $n = 4$; б) $n = 5$; в) $n = 6$.

14.7 Подбрасываются две монеты. Игрок A получает a очков, если выпадают два герба, 0 очков в других случаях. Игрок B получает b очков, если выпадают герб и решка, 0 очков в других случаях. Найдите отношение $a : b$, при котором эта игра станет справедливой.

14.8 **Задача Луки Пачоли (1494 г.).** Двое игроков играют до трех выигрышей. После того как первый игрок выиграл две партии, а второй — одну, игра прервалась. Спрашивается, как справедливо разделить ставку 210 ливров (ливр — серебряная монета).

14.9 **Задача Пьера Ферма (1654 г.).** Пусть до выигрыша всей встречи игроку A недостает двух партий, а игроку B — трех партий. Как справедливо разделить ставку, если игра прервана?

14.2*. Сложный опыт

Пусть производится несколько опытов. Опыты называют **независимыми**, если вероятность появления какого-либо события A в каждом опыте никак не зависит от появления или непоявления этого события в других опытах.

Например, первый опыт заключается в том, что подбрасывается одна игральная кость, а второй — в том, что подбрасывается другая игральная кость. Ясно, что вероятность появления, например, 6 очков в первом опыте никак не зависит от того, что произошло во втором опыте. Следовательно, эти опыты независимы.

Можно говорить о сложном опыте, заключающемся в том, что производятся n независимых опытов. Сложный опыт порождает новые события, каждое из которых для $n = 2$ обозначается (A, B) и заключается в том, что в первом опыте произошло событие A, а во втором — событие B. Совокупность всех упорядоченных пар (A, B) образует множество всех событий, порождаемых данным сложным опытом.

Например, если первый опыт заключается в подбрасывании монеты, а второй — в подбрасывании игральной кости, то эти опыты независимы и пары событий (Г, 1), (Р, 1), (Г, 2), (Р, 2), (Г, 3), (Р, 3), (Г, 4), (Р, 4), (Г, 5), (Р, 5), (Г, 6), (Р, 6), где Г — герб, Р — решка, образуют множество событий, порождаемых данным сложным опытом.

Для двух независимых опытов справедливо равенство

$$P(A, B) = P(A)\,P(B), \tag{1}$$

т. е. для двух независимых опытов **вероятность события (A, B), заключающегося в том, что в первом опыте происходит событие A, а во втором — событие B, равна произведению вероятностей события A в первом опыте и события B во втором опыте.**

В самом деле, считаем, что в первом опыте имеем равновозможные и единственно возможные случаи $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а событию A благоприятствуют m таких случаев. Таким образом, $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Считаем также, что во втором опыте имеем равновозможные и единственно возможные случаи $B_1, B_2, \ldots, B_k$, а событию B благоприятствуют l таких случаев. Таким образом, $P(B) = \dfrac{l}{k}$.

Так как в сложном опыте может произойти только kn равновозможных и единственно возможных случаев, а из них только ml случаев благоприятствуют событию (A, B), то

$$P(A, B) = \frac{ml}{nk} = \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{k} = P(A)\,P(B).$$

Формула (1) обобщается на n независимых опытов

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Если произведено n независимых опытов, то вероятность события $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, заключающегося в том, что в первом опыте произойдет событие A_1, во втором — A_2 и т. д., в n-м — A_n, равна произведению вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответственно в первом, во втором, ..., в n-м опыте.

ПРИМЕР 1. Подбрасывается игральная кость 5 раз (т. е. производится сложный опыт, состоящий из 5 независимых опытов). Какова вероятность того, что одно очко выпадает только в первый, четвертый и пятый раз?

Так как в первом, четвертом и пятом опытах вероятность выпадания одного очка равна $\frac{1}{6}$, а во втором и третьем вероятность того, что не выпадет одно очко, равна $\frac{5}{6}$, то искомая вероятность равна $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^2}{6^5}$.

ПРИМЕР 2. Задача де Мерэ. Какова вероятность того, что при бросании игральной кости 4 раза хотя бы один раз выпадет 6 очков?

Вероятность того, что при четырехкратном бросании игральной кости 6 очков не выпадет ни разу, равна $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Пусть в сложном опыте — четырехкратном бросании игральной кости — событие A заключено в том, что 6 очков не выпадет ни разу, а событие B — 6 очков выпадет хотя бы 1 раз. События A и B несовместные, их сумма (объединение) — достоверное событие, поэтому $B = \overline{A}$ и $P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Отсюда следует, что вероятность того, что при четырехкратном бросании игральной кости 6 очков выпадет хотя бы один раз, равна $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}518$.

14.10 Какие опыты называют независимыми? Приведите примеры.

14.11 Что более правдоподобно — выпадание, по крайней мере, одной шестерки при 4-кратном бросании игральной кости или выпадание, по крайней мере, пары шестерок при 24-кратном одновременном бросании двух костей?

14.12 В каждом из двух ящиков лежат одинаковые шары двух цветов: белые и черные. Опыт заключается в том, что из каждого ящика не глядя берут по одному шару. Известно, что вероятность взять белый шар из первого ящика равна a $(0 < a < 1)$, а вероятность взять белый шар из второго ящика равна b $(0 < b < 1)$. Какова вероятность того, что в результате опыта будут вынуты: а) 2 белых шара; б) 2 черных шара; в) 1 белый шар и 1 черный шар?

14.3*. Формула Бернулли. Закон больших чисел

Пусть в опыте вероятность события A равна p и опыт повторяется n раз, при этом каждый повторяемый опыт независим от остальных.

Тогда в этом сложном опыте вероятность события A_k, заключающегося в том, что событие A произойдет k раз $(k \leqslant n)$, равна

$$P_n(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{1}$$

где $q = 1 - p$. Обычно вместо $P_n(A_k)$ пишут $P_n(k)$.

Формулу (1) называют **формулой Бернулли.**

Действительно, так как в каждом простом опыте вероятность появления события A равна p, то вероятность непоявления события A равна $q = 1 - p$.

Пусть в сложном опыте произошло событие $B_{l_1, \ldots, l_k}$, заключающееся в том, что в простых опытах с фиксированными номерами $l_1, \ldots, l_k$ произошло событие A, а в простых опытах с другими номерами событие A не произошло. Так как опыты независимы, то вероятность этого события $B_{l_1, \ldots, l_k}$ равна произведению вероятностей $P(B_{l_1, \ldots, l_k}) = p^k q^{n-k}$ (см. п. 12.6).

Количество событий $B_{l_1, \ldots, l_k}$ равно числу способов выбрать k элементов из n, т. е. равно C_n^k. Все события $B_{l_1, \ldots, l_k}$ несовместны, событие A_k является объединением всех событий $B_{l_1, \ldots, l_k}$. Поэтому вероятность $P_n(k)$ события A_k равна сумме вероятностей всех событий $B_{l_1, \ldots, l_k}$, т. е. $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$.

Тем самым формула (1) доказана.

ПРИМЕР 1. Пусть всхожесть семян некоторого растения равна 90%. Найдем вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут 3.

В данном примере $p = 0{,}9$, $q = 1 - p = 0{,}1$, $n = 5$, $k = 3$. Тогда $P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^2 \approx 0{,}0729$, т. е. есть вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут 3, приближенно равна 7%.

Очевидно, что

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1, \qquad (2)$$

потому что события A_k несовместны и их сумма есть достоверное событие. Равенство (2) следует также из формулы бинома Ньютона:

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

Равенство (2) выражает **первое свойство чисел $P_n(k)$**: для любого натурального n сумма всех чисел $P_n(k)$ равна 1.

Прежде чем сформулировать второе свойство чисел $P_n(k)$, рассмотрим конкретные примеры.

ПРИМЕР 2. В таблице 10 приведены приближенные значения первых шести чисел $P_{10}(k)$ для $p = \frac{1}{5}$.

Таблица 10

k	0	1	2	3	4	5
$P_{10}(k)$	0,1074	0,2684	0,3020	0,2013	0,0880	0,02640

Мы видим, что числа $P_{10}(k)$ с возрастанием k от 0 до $m = np = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2$ возрастают, а для $k > m$ убывают. Последовательность чисел $P_{10}(k)$ можно было бы продолжить для $A = 6, 7, 8, 9, 10$. Но это не сделано потому, что соответствующие этим k числа $P_{10}(k)$ очень малы, т. е. близки к нулю.

Здесь существенно то, что бóльшие из чисел $P_{10}(k)$ группируются около числа $P_{10}(m)$, где $m = np = 2$.

ПРИМЕР 3. В таблице 11 приведены приближенные значения всех чисел $P_6(k)$ для $p = \frac{2}{3}$.

Таблица 11

k	0	1	2	3	4	5	6
$P_6(k)$	0,0014	0,0165	0,0823	0,2195	0,3292	0,2633	0,0878

Мы видим, что числа $P_6(k)$ с возрастанием k от 0 до $m = np = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$ возрастают, а для $k > m$ убывают. Здесь бóльшие из чисел $P_6(k)$ группируются около $P_6(m)$, где $m = np = 4$.

Сформулируем теперь **второе свойство чисел $P_n(k)$.**

Существует натуральное число m, приближенно равное np ($m \approx np$ с точностью до 1), такое, что при возрастании k от 0 до m числа $P_n(k)$ возрастают, при $k = m$ (иногда и при $k = m + 1$) достигают максимума, а при дальнейшем возрастании k убывают. При этом бóльшие числа $P_n(k)$ группируются около максимального значения $P_n(m)$.

В примерах 2 и 3, вычисляя значения $P_n(k)$, можно показать, что дробь $\frac{k}{n}$ (относительная частота появления события A) для k, близких к m, мало отличается от p.

Действительно, в примере 2 сумма $P_{10}(1) + P_{10}(2) + P_{10}(3)$ есть, очевидно, вероятность того, что при рассматриваемом нами десятикратном повторении опыта событие A произойдет либо 1, либо 2, либо 3 раза. Это записывают так:

$$P(1 \leqslant k \leqslant 3) = P_{10}(1) + P_{10}(2) + P_{10}(3).$$

Поскольку неравенство $1 \leqslant k \leqslant 3$ можно записать так: $|k - 2| \leqslant 1$ или так: $\left|\frac{k}{10} - \frac{1}{5}\right| \leqslant 0{,}1$ — и поскольку $P_{10}(1) + P_{10}(2) + P_{10}(3) \approx$ $\approx 0{,}7717$, то пишут

$$P\left(\left|\frac{k}{10} - \frac{1}{5}\right| \leqslant 0{,}1\right) \approx 0{,}7717.$$

Это приближенное равенство означает, что при десятикратном повторении опыта, в котором вероятность наступления события A равна $\frac{1}{5}$, вероятность того, что относительная частота $\frac{k}{10}$ повторения события A отличается от вероятности события A на величину, не большую 0,1, приближенно равна 0,7717, что достаточно близко к 1.

В примере 3 сумма $P_6(3) + P_6(4) + P_6(5)$ есть, очевидно, вероятность того, что при рассматриваемом нами шестикратном повторении опыта событие A произойдет либо 3, либо 4, либо 5 раз. Это записывают так:

$$P(3 \leqslant k \leqslant 5) = P_6(3) + P_6(4) + P_6(5),$$

или так:

$$P(|k - 4| \leqslant 1) = P(3) + P(4) + P(5) \approx 0{,}812,$$

или, наконец, так:

$$P\left(\left|\frac{k}{6} - \frac{2}{3}\right| \leqslant \frac{1}{6}\right) \approx 0{,}812.$$

Это приближенное равенство означает, что при шестикратном повторении опыта, в котором вероятность наступления события A

равна $\frac{2}{3}$, вероятность того, что относительная частота $\frac{k}{6}$ события A отличается от вероятности события A на величину, не большую $\frac{1}{6}$, приближенно равна 0,812, что также достаточно близко к 1.

Эти примеры подтверждают так называемый **закон больших чисел.**

Пусть в опыте вероятность появления некоторого события A равна p. Тогда при многократном повторении опыта (считая эти опыты независимыми) близка к 1 вероятность того, что относительная частота появления события A мало отличается от p.

Этот закон можно сформулировать более точно:

Для любых сколь угодно малых положительных чисел ε и δ можно указать достаточно большое натуральное число n, такое, что при n-кратном повторении опыта относительная частота $\frac{m}{n}$ события A, имеющего в каждом опыте вероятность p, отклоняется от p меньше чем на ε с вероятностью, большей чем $1 - \delta$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta.$$

14.13 Всхожесть семян некоторого растения равна 90%. Найдите вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут:
а) 0; б) 1; в) 2; г) 4; д) 5.

14.14 Монета подбрасывается 10 раз. Вычислите вероятность выпадания герба:
а) не более чем 2 раза; б) не более чем 3 раза.

14.15 Монета подбрасывается 20 раз. Вычислите $P_{20}(k)$, если $k = 0, 1, 2, 3$.

14.16 Имеется тест из четырех заданий. К каждому из заданий даны 5 ответов для выбора. Контролирующее устройство проверяет работу ученика по номерам выбранных ответов и выставляет отметку:
5 — за выбор верных ответов во всех четырех заданиях;
4 — за выбор верных ответов в любых трех заданиях;
3 — за выбор верных ответов в любых двух заданиях;
2 — за выбор верного ответа лишь в одном задании;
1 — за выбор неверных ответов во всех четырех заданиях.
Ученик, не выполняя заданий, решил случайным образом указать номера верных ответов в каждом из них. Какова вероятность таким способом получить отметку:
а) 5; б) 4; в) 3; г) 2; д) 1?

Исторические сведения

Еще в глубокой древности появились азартные игры. В Древней Греции и Риме широкое распространение получили игры в астрагалы (т. е. бросание костей из конечностей животных) и в игральные кости (кубики с нанесенными на гранях точками). В средневековой Европе азартные игры способствовали зарождению и становлению комбинаторики и теории вероятностей.

Задачи о дележе ставки встречались уже в рукописных арифметических учебниках XIII в. В них требовалось справедливо разделить ставку между двумя игроками, если игра прервана по каким-либо причинам. В работе итальянского математика Луки Пачоли (1445—1514) «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности» (1494) она сформулирована так.

«Необходимо разделить ставку между игроками в том случае, когда один имеет пять выигранных партий, а другой — две, договорились же играть до шести выигранных партий».

Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Никколо Тарталья (1499—1557).

Задачи о дележе ставки оставались нерешенными до середины XVII в., когда возникла переписка французских математиков Блеза Паскаля (1623—1662) и Пьера Ферма (1601—1665), опубликованная в Тулузе в 1679 г. В этой переписке оба ученых, хотя и несколько разными путями, приходят к верному решению таких задач, деля ставку пропорционально вероятности выиграть всю ставку, если игра будет продолжена.

Применив методы комбинаторики, Паскаль предложил решение задачи в общем случае, когда одному игроку остается до выигрыша r партий, а другому — s партий. Полученное им решение данной задачи привело к введению в теорию вероятностей понятия математического ожидания. Ферма со своей стороны нашел решение и для более сложного случая, когда игра происходит между произвольным числом игроков.

В 1657 г. голландский математик Христиан Гюйгенс (1629—1695) опубликовал печатную работу под названием «О расчете

Б. Паскаль

П. Ферма

Г. Лейбниц

в азартных играх», в которой он получил те же результаты, что и Б. Паскаль и П. Ферма. В предисловии Гюйгенс пишет: «Во всяком случае, я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории».

Первоначально задачи об азартных играх решались средствами комбинаторики, развитие которой связано с именами швейцарского математика Якоба Бернулли (1654—1705), немецкого математика Готфрида Лейбница (1646—1716) и члена Петербургской академии наук Леонарда Эйлера (1707—1783). Однако и у них основную роль играли приложения к различным играм.

Первые задачи по вычислению вероятностей появились в XVII в. в работах Б. Паскаля, Я. Бернулли и др. Предметом дискуссий в это время был вопрос о том, какие события можно считать равновероятными в разных случаях определения вероятности. В силу неразработанности теории вычисление вероятностей иногда выполнялось с ошибками. Например, задачу о вычислении вероятности того, что две подбрасываемые одинаковые монеты упадут на одну и ту же сторону, французский математик Д'Аламбер решил неверно, так как считал, что опыт с двумя монетами имеет три равновозможных исхода: обе монеты упадут на герб, обе монеты упадут на решку, одна из монет упадет на герб, а другая на решку. На самом деле этот опыт имеет четыре равновозможных исхода (см. п. 13.2, пример 4).

Английский математик Исаак Ньютон (1643—1727) дал исчерпывающее решение следующей задачи, опираясь на формулу Бернулли (см. п. 14.3).

«Какое из событий более вероятно:

1) появление по крайней мере одной шестерки при подбрасывании шести костей;

2) появление хотя бы двух шестерок при подбрасывании 12 костей;

3) появление не менее трех шестерок при подбрасывании 18 костей?»

В некоторых странах уже более двухсот лет назад начали проводить так называемую «генуэзскую лотерею». Желающие участвовать покупали билеты, на которых были напечатаны числа от 1 до 90, и отмечали одно, два, три, четыре или пять из этих чисел. В день розыгрыша из мешка, содержавшего номера от 1 до 90, вытаскивали случайным образом 5 номеров; выигрывали те и только те билеты, все номера которых оказывались среди вытянутых.

Владелец выигравшего билета с одним отмеченным номером получал в 15 раз больше стоимости билета; с двумя номерами — в 270 раз; с тремя — в 5500 раз; с четырьмя — в 75 000 раз и с пятью выигравшими номерами — в 1 000 000 раз больше стоимости билета. Если же на билете был отмечен хотя бы один из невытянутых в лотерее номеров, билет не выигрывал.

Так как вероятность угадать все пять чисел из 90 составляет

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{43\,969\,268},$$

то такой выигрыш возможен в среднем один раз из почти 44 000 000 попыток.

В середине XVIII в. Л. Эйлер в работе «Решение одного очень трудного вопроса теории вероятностей» решил задачи об определении вероятностей угадывания одного, двух, трех, четырех, пяти чисел в генуэзской лотерее.

Кроме решения задач, связанных с различными играми и лотереями, Л. Эйлер решал задачи, связанные с проблемами страхового дела и демографии. Он сформулировал 6 важных задач демографии и указал формулы для их решения. Приведем две его задачи.

«Найти вероятность того, что лицо возраста m лет проживет еще n лет.

Из данной группы в M лиц данного возраста m лет найти число лиц, которые проживут еще n лет».

Его идея решения подобных задач служит основой для демографических расчетов и по сей день.

В XVIII в. и в начале XIX в. в работах Я. Бернулли, английского ученого А. Муавра, французских ученых П. Лапласа, С. Пуассона и др. были доказаны первые теоремы теории вероятностей. В XIX—XX вв. теория вероятностей получила дальнейшее развитие в трудах российских ученых П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова, А. А. Маркова.

После введения Андреем Николаевичем Колмогоровым (1903—1987) аксиоматики в 1933 г. теория вероятностей — полноправная математическая наука, имеющая многочисленные применения в естественных науках, технике, социологии, военном деле и т. д.

Задания для повторения

Данный раздел предназначен для повторения материала, изученного в девятилетней школе, и итогового повторения за курс 10 класса. В нем даны некоторые задачи выпускных школьных экзаменов и конкурсных экзаменов в вузы страны. Список принятых сокращений приведен в конце раздела.

Числа и вычисления

Вычислите **(1—5)**:

1 (МГУЭСИ). а) $\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}$;

б) $9900\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{21}{9900}-\frac{1}{495}\right)$;

в) $\dfrac{0{,}6+\frac{1}{4}+\frac{1}{15}+0{,}125}{\frac{1}{3}+0{,}4+\frac{4}{15}}\cdot 24$;

г) $\dfrac{0{,}64-\frac{1}{25}}{0{,}8:\left(\frac{4}{5}\cdot 1{,}25\right)}$;

д) $\frac{20}{99}+0{,}2+\frac{0{,}097}{1-0{,}01}$;

е) $243\cdot\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}}{0{,}05+\frac{2}{5}-0{,}2}$;

ж) $4\cdot\dfrac{45\frac{10}{63}-44\frac{25}{84}}{\left(2\frac{1}{3}-1\frac{1}{9}\right):4-\frac{3}{4}}:31$.

2 (МГАВТ). а) $\left(0{,}24-\frac{12}{15}\right)\cdot 0{,}5+3{,}57:3{,}5$;

б) $\left(\frac{3}{5}+0{,}25-\frac{1}{8}\right)\cdot 3{,}2+\frac{9}{2}:10$;

в) $\dfrac{\left(-6\frac{2}{15}-1\frac{1}{12}+\frac{13}{60}\right):0{,}5+11}{2{,}4\cdot 1{,}3-1{,}88}$.

3 (РГОТУПС). а) $\left(6\frac{3}{5}-3\frac{3}{14}\right)\cdot(0{,}562+0{,}138)$;

б) $\dfrac{\left(13{,}75+9\frac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}+\dfrac{\left(6{,}8-3\frac{3}{5}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\frac{1}{6}$.

4 (МГОПУ). $\dfrac{1\frac{1}{5} : \left(\frac{17}{40} + 0{,}6 - 0{,}005\right) \cdot 1{,}7}{\frac{5}{6} + 1\frac{1}{3} - 1\frac{23}{30}} + \dfrac{4{,}75 + 7\frac{1}{2}}{33 : 4\frac{5}{7}} : 0{,}25.$

5 а) $4{,}22 + 0{,}145 : \left(\left(\frac{22}{45} - \frac{7}{12} - \frac{11}{60}\right) \cdot 0{,}16 + \frac{1}{60}\right);$

б) $1{,}4 + 0{,}9 \cdot \left(3\frac{1}{15} + 0{,}98 : \left(\frac{12}{65} - \frac{7}{52} - \frac{11}{24}\right)\right);$

в) $\left(\left(4\frac{62}{125} + 33{,}022 : 5\frac{1}{2}\right) : \left(6{,}4 - 3\frac{1}{3} \cdot 0{,}24\right)\right) \times$

$\times \left(\left(2{,}375 + 4\frac{1}{4}\right) \cdot 2\frac{2}{3} - \left(12{,}475 + 18\frac{1}{8}\right) : 75\right).$

6 (МГАХМ). Представьте в виде десятичной дроби обыкновенную дробь: а) $\frac{17}{20}$; б) $\frac{7}{8}$.

7 Представьте в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь:
а) 2,(4); б) 3,(5); в) 2,(17); г) 2,1(7); д) 2,17(1).

8 Сравните числа:
а) $\frac{3}{11}$ и 0,(27); б) $\frac{5}{7}$ и 0,(7); в) $-\frac{4}{15}$ и $-0{,}2(8)$; г) $-\frac{11}{30}$ и $-0{,}3(4)$.

9 (МГУ, геол. ф-т)
а) Какое из чисел меньше: $2\sqrt{10}$ или 6,(32)?
б) Какое из чисел больше: $2\sqrt{17}$ или 8,(24)?
в) Какое из чисел меньше: $\sqrt[3]{47}$ или $\sqrt{13}$?

10 Определите, что больше:
а) $(1 - \sqrt{3})^{-1}$ или $(1 + 3^{0,5})^{-2}$; б) $(1 - \sqrt{2})^{-2}$ или $(2^{1,5} + 3)^{-1}$.

11 Вычислите:
а) $\dfrac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{\frac{1}{7} + \frac{1}{49} - 2\frac{8}{49}};$ б) $\dfrac{(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})}{\frac{7}{8} - 0{,}125 + \frac{1}{20}};$

в) $\dfrac{2^0 + (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) \cdot (\sqrt{3})^0}{\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 0{,}375};$ г) $\dfrac{0{,}625 + \frac{1}{8} + 2^0 - 2^{-1}}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)};$

д) $\left(\dfrac{(2 + 2\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)^2}{(0{,}05)^0 + 0{,}75 - \frac{1}{4}}\right)^{-1};$ е) $\dfrac{1}{16} \cdot \dfrac{(4 + 2\sqrt{3})^3}{26 + 15\sqrt{3}}.$

12 (РУДН). Вычислите, не пользуясь калькулятором:

$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)(\sqrt{6}+11).$$

13 (РГАЗУ). Докажите равенство

$$\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1.$$

14 (МГУ, почв. ф-т). Докажите, что число

$$\left(\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2+7\right)\left(\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)^2-7\right)$$

целое и найдите это число.

15 (РЭА). Докажите, что данное число целое и найдите это число

а) $\left(\sqrt[6]{2}-\sqrt[6]{7}\right)\left(\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{14}\right)\left(\sqrt[6]{7}+\sqrt[6]{2}\right)$;

б) $\left(\left(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{125}\right)^2+9\right)\left(\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{125}\right)^2-9\right)$;

в) $\left(\left(\sqrt[6]{3}-\sqrt[6]{5}\right)^2+\sqrt[6]{960}\right)\left(\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}\right)^2-3\sqrt[3]{15}\right)$.

16 Вычислите:

а) (МГУ, геол. ф-т). $3\cdot\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{\sqrt{8-2\sqrt{7}}}-\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{7}}}{\sqrt{3-\sqrt{7}}}\cdot\sqrt{2}$;

б) (МГУ, геол. ф-т). $\dfrac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+4\cdot\dfrac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{\sqrt{6-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{\dfrac{17}{2}}$;

в) (МВВДИУ). $\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}\right)$;

г) (МТУСИ). $\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{4}$;

д) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$;

е) $\sqrt{31}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{5}}$;

ж) $\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$;

з) $\left(\sqrt[6]{(2+\sqrt{3})^2}+2\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$.

Упрощение выражений

17 (РГОТУПС). Выполните действия: $(x^2+7x-3)(5x-2)$.

18 (СПГИЭА). Найдите коэффициент при x^3 в выражении

$$(x-3)^3-(2x(3+(x-3)^2)-10).$$

Упростите выражение (19—24):

19 а) $\dfrac{a^3+b^3+3ab(a+b)}{(a+b)^3}\cdot 2;$ б) $\dfrac{(a^2-ab+b^2)(a^2+2ab+b^2)(a+b)}{(a+b)^2(a^3+b^3)};$

в) $\dfrac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)};$ г) $\dfrac{(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3}{(x+y)(y+z)(x+z)}\cdot 9;$

д) $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac}-a-b-c-1.$

20 а) $\dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)};$

б) $\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right):\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{2}{ab}\right)-\dfrac{2b}{b-a};$

в) $\dfrac{a^6-b^6}{(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)}-(a^2-b^2);$

г) $\left(\dfrac{9}{m^2-3m+9}+\dfrac{2m}{3+m}-\dfrac{m^3-15m^2}{m^3+27}\right)\left(m+3-\dfrac{9m}{m+3}\right)\cdot\dfrac{1}{m+3};$

д) $\left(\dfrac{9}{n^2+3n+9}-\dfrac{2n}{3-n}-\dfrac{n^3+15n^2}{n^3-27}\right)\left(n-3+\dfrac{9n}{n-3}\right)\cdot\dfrac{1}{n-3}.$

21 (МВОКУ). $\dfrac{x+1}{x^3+x^2+x}:\dfrac{1}{x^4-x}-x^2.$

22 (РГОТУПС). $\dfrac{x^3-y^3}{(3x+y)^2-8x^2-5xy}+\dfrac{(x+y^2)(x^2+y)-xy\,(xy+1)}{x^2-xy+y^2}.$

23 (МГЗИПП). $\left(\dfrac{2}{2a-b}+\dfrac{6b}{b^2-4a^2}-\dfrac{4}{2a+b}\right):\left(1+\dfrac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}\right).$

24 (ГАСБУ). $\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{5x^2+x+3}\right)\cdot\left(\dfrac{25x^3+12}{10x^2+30x}+1\right)\times$

$\times\left(\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{5x^2+x+3}\right)^{-1}:\dfrac{(6+5x^2)^2}{5x^4-45x^2}.$

25 Сократите дробь:

а) (ГУЗ). $\dfrac{7x-2x^2-3}{2x^2-x};$ б) (ГУЗ). $\dfrac{2+x-3x^2}{9x^2-4};$

в) (РГАЗУ). $\dfrac{5x^2+4x-1}{5x^2-6x+1};$ г) (ВАХЗ). $\dfrac{x^3+4x^2-9x-36}{x^2+x-12};$

д) (МГТУ СТАНКИН). $\dfrac{2+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-2}.$

Упростите выражение **(26—30)**:

26 а) (МГТА). $\dfrac{3a^2+12a+13}{3a+6}-a-\dfrac{1}{3(a+2)}$;

б) (МГУГК). $\dfrac{4x^2-5x+1}{4x-1}-\dfrac{x^2-1}{1-x}$;

в) (МГУГК). $\dfrac{9a^2-4}{2-3a}-\dfrac{6a^2-5a-6}{3-2a}$;

г) (МГОУ). $\left(\dfrac{x^3-x}{x^2-1}-2x+1\right):\left(\dfrac{1+x}{1-x^2}\right)^{-1}$;

д) (МГАВТ). $\left(\left(\dfrac{3a}{a^3-b^3}\cdot\dfrac{a^2+b^2+ab}{a+b}-\dfrac{3}{b-a}\right):\dfrac{2a+b}{a^2+2ab+b^2}\right)\cdot\dfrac{3}{a+b}$.

27 (МГУЭСИ)

а) $2\cdot\dfrac{(a^2+a-2)(a+2)}{(a^2+4a+4)(a-1)}$;

б) $5\cdot\dfrac{(a^2+5a+6)(a^2-2a+4)}{(a+3)(a^3+8)}$;

в) $\dfrac{(a^3+27)(a+4)}{(a^2-3a+9)(a^2+7a+12)}$;

г) $\dfrac{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(a-b)(a+2\sqrt{a}+1)}$.

28 (МГУГК). $\left(1+2a^{\frac{2}{3}}-\dfrac{a+\sqrt[3]{a^2}}{1+a^{\frac{1}{3}}}\right):\dfrac{1-a\sqrt[3]{a}}{1-a^{\frac{2}{3}}}$.

29 а) $\left(\dfrac{16}{c}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot(0{,}5c^{-2})^{\frac{2}{15}}:\sqrt[5]{2c^7}$;

б) $\left(3d^{\frac{3}{4}}:\sqrt[3]{d^{\frac{1}{4}}\cdot 81\cdot d^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-6}$.

30 а) (МГУ, геол. ф-т). $\left(\dfrac{8a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\dfrac{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{4a-b}\right)^2$;

б) (МГУ, почв. ф-т). $\left(\dfrac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\sqrt{\dfrac{b}{4a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$;

в) $\left(\sqrt{\dfrac{9y}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3y}}{\sqrt{x}-\sqrt{3y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3y}}{\sqrt{x}+\sqrt{3y}}\right)$;

г) (МГУК). $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{\sqrt{x}-x^2}+x$;

д) (ГАНГ). $\dfrac{0{,}001-64b^3}{0{,}01+0{,}4b+16b^2}+4b$.

31 Упростите выражение и вычислите его значение:

а) $\left(\dfrac{3+2a}{3-2a}\right)\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^4$, если $a=\sqrt[4]{5}$;

б) $\sqrt{(1+x)^2}+\sqrt{(x-1)^2}$, если $|x|<1$;

в) $\dfrac{a^2+1}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-1}{2a}\right)^2+1}}$, если $a<0$;

г) $\left(\dfrac{\dfrac{1}{a}-a}{(\sqrt[3]{a}+a^{-\frac{1}{3}}+1)(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}-1)}+a^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}$, если $a=1{,}75$;

д) (МГУ, геол. ф-т). $\dfrac{7\sqrt{3}\cdot\sqrt{a}-7\sqrt{5}\cdot\sqrt{b}}{6\sqrt{3}\cdot\sqrt{a}+6\sqrt{5}\cdot\sqrt{b}}:\dfrac{3a-5b}{9a+15b+6\sqrt{15ab}}$.

32 (МГУ, геол. ф-т). $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+27b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}+9\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\dfrac{3\sqrt{a}+9\sqrt{b}}{a-9b}\right)^2$.

Линейные и квадратные уравнения

33 (МГАДИ). Решите уравнение:

а) $Ax+B=\dfrac{21}{40}+\dfrac{17}{24}+\dfrac{13}{15}$, если $A=\dfrac{1}{3}$, $B=-0{,}9$.

б) $Ax+B=\dfrac{5}{9}+0{,}9+\dfrac{38}{45}$, если $A=10$, $B=-0{,}2$.

34 (МГУЛ). Найдите x, если $\dfrac{x}{\dfrac{1}{45}+\dfrac{2}{9}}=\dfrac{14+1{,}75}{\dfrac{7}{30}}$.

Решите уравнение **(35—37)**:

35 а) (МГАУ). $(x-4):\dfrac{7}{8}=\dfrac{5}{4}(x-7)$;

б) (РГОТУПС). $2x^2-x-1=0$;

в) (МВВДИУ). $2x^2-5x-3=0$;

г) (МГАВТ). $2(1-1{,}5x)+2(x-2)^2=1$;

д) (МГТА). $(x-2)(1-x)=x(4-x)$.

36 а) (МГУ, хим. ф-т). $|x|=4-x$;

б) (МГУ, хим. ф-т). $|x|=2-x$;

в) (МГУ, физ. ф-т). $2|x+1|=2-x$;

г) (МГУ, биол. ф-т). $|x-1|+|2x-3|=2$;

д) (МГУ, псих, ф-т). $|2x-15|=22-|2x+7|$;

е) (МГУ, геогр. ф-т). $|2x+8|-|x-5|=12$;

ж) (МГУ, геогр. ф-т). $|2x+9|-|x-6|=15$;

з) (МГУ, геогр. ф-т). $|5x-3|-|7x-4|=2x-1$.

37 а) (МГУ, экон. ф-т). $3|x+2|+x^2+6x+2=0$;
б) (МГУ, экон. ф-т). $3|x+1|+x^2+4x-3=0$;
в) (МГУ, биол. ф-т). $(x-7)^2-|x-7|=30$;
г) (МГУ, социол. ф-т). $|x^2+3x|=2(x+1)$;
д) (МГУ, социол. ф-т). $|x^2-3x|=2x-4$.

38 (МГАТХТ). Найдите произведение корней уравнения:
а) $4x^2+x-3=0$; б) $5x^2-8x-4=0$.

39 а) Найдите коэффициент p в уравнении $2x^2+px+12=0$, имеющем корень 3.
б) Найдите коэффициент q в уравнении $2x^2+6x+q=0$, имеющем корень -2.
в) Найдите коэффициент q в уравнении $x^2+7x+q=0$, имеющем корень 3.
г) При каком наибольшем значении a квадратное уравнение $x^2-(a+3)x+a^2=0$ имеет корень 3?

40 При каком значении a уравнение:
а) $x^2+ax+a-1=0$ имеет равные корни;
б) $x^2-10x+a=0$ имеет равные корни;
в) $(a-1)x^2-ax+a+1=0$ имеет два действительных корня;
г) $ax^2+2(a+1)x+a+3=0$ имеет два действительных корня?

41 а) В уравнении $x^2-kx+2=0$ определите наибольшее значение k, при котором разность корней уравнения равна 1.
б) Найдите значение q в уравнении $x^2-6x+q=0$, один корень которого больше другого на 4.
в) Найдите наибольшее значение p, при котором разность корней уравнения $x^2+px+12=0$ равна 1.

42 (МГТА). Найдите сумму корней уравнения
$$x-1=(x+\sqrt{11})(\sqrt{11}-x).$$

43 (МГУГК). Дано: x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$. Составьте уравнение, корни которого $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

44 (МГЗИПП). Найдите a, если равны корни уравнения
$$x^2-2ax+a+2=0.$$

45 а) При каком значении p равна 2 разность корней уравнения $x^2+4x+p=0$?
б) Найдите коэффициент q в уравнении $x^2-2x+q=0$, корни которого связаны соотношением $2x_2+x_1=3$.

46 Даны два уравнения: $x^2-5x+p=0$, $x^2-7x+2p=0$. Найдите значение p, при котором один из корней второго уравнения вдвое больше одного из корней первого уравнения.

47 При каком наименьшем целом положительном значении b корни уравнения

$$(b+1)\,x^2 - 4bx + b - 5 = 0$$

положительны?

48 (МГУЭСИ). Вычислите:

а) $\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1\cdot x_2}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+6x+4=0$;

б) $\dfrac{(x_1+x_2)^3}{x_1\cdot x_2}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+5x+1=0$;

в) $\dfrac{x_1\cdot x_2}{(x_1+x_2)^2}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-5x+4=0$;

г) $\dfrac{x_1\cdot x_2}{(x_1+x_2)^3}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $-x^2+2x+6=0$.

49 (РЭА). а) Найдите значение p, если корни уравнения

$$2x^2 - 5x + p = 0$$

удовлетворяют условию $\dfrac{x_2^2}{x_1}+\dfrac{x_1^2}{x_2}=\dfrac{65}{8}$.

б) Найдите значение p, если корни уравнения

$$6x^2 + 3x - p = 0$$

удовлетворяют условию $x_1\cdot x_2^4 + x_2\cdot x_1^4 = \dfrac{63}{8}$.

в) Найдите отрицательное значение q, если корни уравнения

$$3x^2 - 2qx - 15 = 0$$

удовлетворяют условию $x_1\cdot x_2^3 + x_2\cdot x_1^3 = -\dfrac{530}{9}$.

г) Найдите положительное значение q, если корни уравнения

$$2x^2 + qx - 18 = 0$$

удовлетворяют условию $\dfrac{1}{x_1^2}-\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{65}{324}$.

50 (РЭА). а) При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $2x^2-10x+a=0$ равна 17?

б) При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $2x^2+6x-a=0$ равна 29?

в) При каком значении a разность квадратов корней уравнения $3x^2+x+a=0$ равна $\dfrac{7}{9}$?

г) При каком значении a разность квадратов корней уравнения $3x^2+x-a=0$ равна $\dfrac{5}{9}$?

Рациональные уравнения

Решите уравнение (51—55):

51 а) $\dfrac{9x+5}{3x+10}-\dfrac{3x+7}{x+6}=0$; б) $\dfrac{3x+8}{7x-3}-\dfrac{6x-9}{14x+44}=0$;

в) $\dfrac{9x-4}{3x+7}-\dfrac{3x+4}{x+5}=0$; г) $\dfrac{3x+2}{7x-17}-\dfrac{6x-21}{14x+16}=0$.

52 а) $\dfrac{2x-18}{x^2-13x+36}=1$; б) $\dfrac{3x-6}{x^2-5x+6}=1$;

в) $\dfrac{2x-2}{3x^2-17x+14}=1$; г) $\dfrac{2x-6}{5x^2-17x+6}=1$.

53 а) $\dfrac{5}{x^2-12x+36}+\dfrac{1}{36-x^2}-\dfrac{1}{x+6}=0$;

б) $\dfrac{4}{x^2-10x+25}+\dfrac{1}{25-x^2}-\dfrac{1}{x+5}=0$;

в) $\dfrac{8-x}{x-6}-\dfrac{x^2-15x+57}{x^2-13x+43}=0$; г) $\dfrac{7-x}{x-5}-\dfrac{x^2-13x+43}{x^2-11x+31}=0$;

д) $\dfrac{65}{1-x^3}+\dfrac{17x-10}{x^2+x+1}=\dfrac{25}{x-1}$; е) $\dfrac{12}{x^3-8}+\dfrac{x+1}{x^2+2x+4}=\dfrac{4}{x-2}$.

54 а) (МГАДИ). $\dfrac{6}{x^2-1}+\dfrac{2}{x+1}=2-\dfrac{x-4}{x-1}$;

б) (МГАХМ). $\dfrac{30}{x^2-1}-\dfrac{13}{x^2+x+1}=\dfrac{18x+7}{x^3-1}$.

55 (МГУ, почв. ф-т)

а) $\dfrac{x^{17}-1}{1-x^{15}}=\dfrac{1-x^{15}}{x^{13}-1}$; б) $\dfrac{1-x^{11}}{1-x^9}=\dfrac{1-x^9}{1-x^7}$.

56 Являются ли числа 1, –1, 2, –2 корнями многочлена

а) $P_3(x)=3x^3+8x^2+3x-2$; б) $P_3(x)=3x^3+5x^2-8$;

в) $P_3(x)=x^3-2x^2-x+2$; г) $P_4(x)=x^4-2x^3-7x^2+5x-12$?

57 Среди каких рациональных чисел следует искать корни многочлена, если они существуют:

а) $P_3(x)=x^3-3x^2+3x-2$; б) $P_3(x)=2x^3+3x^2-3$;

в) $P_3(x)=2x^3+2x^2-x-1$; г) $P_4(x)=x^4-3x^3+2x^2+3x-6$?

Решите уравнение (58—59):

58 а) $x^3-4x^2+6x-3=0$; б) $4x^3+3x^2+1=0$;

в) $2x^3-4x^2-3x+6=0$; г) $2x^4-x^3-6x^2+3x=0$;

д) $x^4-3x^2-11x-21=0$; е) $x^4-3x^3+2x^2+x-3=0$.

59 а) $x^3+2x^2-5x-10=0$; б) $x^3-3x^2-4x+12=0$;

в) $x^3-4x^2+x-4=0$; г) $2x^3-15x^2+34x-24=0$;

д) $x^4+x^3-4x^2+2x-12=0$; е) $x^4-5x^2+4=0$.

Системы уравнений

Решите систему уравнений (60—62):

60 (МГУЭСИ)

а) $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ x - y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + y = 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x + 3y = 165 \\ 5x + 2y = 330; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x + 3y = 49 \\ 3x + 2y = 46. \end{cases}$

61 а) $\begin{cases} x - 2y - 3z = -6 \\ 4x - 7y - 5z = -5 \\ 2x - y + 2z = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 4x + 4y + z = 15. \end{cases}$

62 (МГАТХТ)

а) $\begin{cases} -x + y - z = 14 \\ 3x + y + 2z = -2 \\ 2x - y - 3z = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ 3x + y + 2z = 6. \end{cases}$

63 При каком значении a система уравнений $\begin{cases} ax + 3y = 5 \\ 4x + (4 + a)y = 10 \end{cases}$

а) не имеет решений;
б) имеет бесконечно много решений;
в) имеет единственное решение?

64 При каком значении a система уравнений $\begin{cases} ax + y = a \\ x + (2a + 1)y = a + 2 \end{cases}$

а) не имеет решений;
б) имеет бесконечно много решений;
в) имеет единственное решение?

65 При каком значении a система уравнений $\begin{cases} 2x + (a + 1)y = 5 \\ (a + 2)x + 6y = 8 + a \end{cases}$

а) не имеет решений;
б) имеет бесконечно много решений;
в) имеет единственное решение?

66 При каком значении a система уравнений $\begin{cases} x + (a^2 - 3)y = a \\ x + y = 2 \end{cases}$

а) не имеет решений;
б) имеет бесконечно много решений;
в) имеет единственное решение?

67 При каком наибольшем значении a система уравнений

$$\begin{cases} x + ay = a + 1 \\ (a + 1)x + 2y = a + 2 \end{cases}$$

не имеет решений?

68 Определите, при каких значениях k система уравнений:

а) $\begin{cases} (k+2)x + 6y = 30 - 5k \\ 6x + (k+7)y = 30; \end{cases}$ б) $\begin{cases} kx + 2y = k + 2 \\ (2k+1)x + (k+1)y = 2k+1 \end{cases}$

имеет бесконечное множество решений; не имеет решений.

Решите систему уравнений **(69—76)**:

69 а) $\begin{cases} \dfrac{2}{y^2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y-2}{x} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x+3}{y} = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{y}{x+1} = 1 \\ 1 - x^2 = y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{y}{1-x} = 1 \\ y + 1 = x^2. \end{cases}$

70 а) (МГУ, геол. ф-т). $\begin{cases} x^2 - xy = 20y \\ 5xy - 5y^2 = 4x; \end{cases}$

б) (МГУ, биол. ф-т). $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$

71 (МГУ, хим. ф-т)

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x-y) + 2 = 0 \\ z^2 + xz + yz - 4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4(x-y) + 8 = 0 \\ z^2 + xz + yz - 9 = 0. \end{cases}$

72 (МГУ, геол. ф-т)

а) $\begin{cases} 2x^4 + y^2 = 10 \\ x^2 + 2y^4 = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^4 + y^2 = 30 \\ x^2 + y^4 = 30; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^4 + 2y^2 = 15 \\ 2x^2 + y^4 = 15. \end{cases}$

73 (МГУ, физ. ф-т). $\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1 \\ y = 5 + |x-1|. \end{cases}$

74 а) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$

75 (МФТИ)

а) $\begin{cases} x^2 - 4x - 2y - 1 = 0 \\ y^2 - 2x + 6y + 14 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 4x + 4y + 27 = 0 \\ y^2 + 2x + 8y + 10 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 6x - 3y - 1 = 0 \\ y^2 + 2x + 9y + 14 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 7x - y + 11 = 0 \\ y^2 + 3x - y + 15 = 0. \end{cases}$

76 а) $\begin{cases} \dfrac{x}{a-b} - \dfrac{y}{a+b} = 2ab \\ y - x = 2b^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (c+d)x + (c-d)y = 2c^3 \\ \dfrac{x+cd}{y-cd} = 1, \end{cases}$

где a, b, c, d — данные числа и $|a| \neq |b|$, $cd \neq 0$.

Решение неравенств

Решите неравенство (77—102):

77 а) $5x + 7 > 3x + 20$; б) $10x + 5 < 7x + 16$;
в) $3x + 11 < 7x - 5$; г) $11x - 8 > -x - 13$;
д) $-x + 6 \leqslant 4x - 9$; е) $-2x + 3 \geqslant 5x - 12$.

78 (МГАВТ). а) $\frac{3}{5}(3x - 1) > \frac{1}{8}(4 - x)$;
б) $\frac{1}{2} - \left(\frac{x + 1}{4} - \frac{2x + 1}{9}\right) > \frac{x + 3}{4} - \frac{x - 4}{9}$.

79 а) $\frac{6x - 5}{2} - \frac{2 - 5x}{5} > \frac{3}{2}$; б) $\frac{3x + 4}{4} - \frac{5 - 2x}{6} < \frac{5}{4}$.

80 а) $(x - 2)(x - 3) > 0$; б) $(x - 4)(x - 6) < 0$;
в) $(x + 4)(x - 1) > 0$; г) $(x + 1)(x + 2) < 0$;
д) $x^2 - 10x + 24 < 0$; е) $x^2 - 14x + 66 < 3 + 2x$;
ж) $(x - 3)(x - 5) \geqslant 0$; з) $(x - 1)(x - 3) \leqslant 0$;
и) $(x + 3)(x - 4) \geqslant 0$; к) $(x + 5)(x + 2) \leqslant 0$;
л) $x^2 + 7x + 6 \leqslant 0$; м) $x^2 + 6x + 5 \leqslant 0$.

81 (МГУЭСИ)
а) $x^2 - 6x + 5 < 0$. Укажите наименьшее целое решение.
б) $x^2 - 9x + 14 \leqslant 0$. Укажите наибольшее целое решение.

82 (МГУ, почв. ф-т)
а) $(x^2 - 4x)^2 \geqslant 16$; б) $(4x^2 + 4x)^2 < 1$.

83 а) $(x - 1)(x + 4)(x + 5) > 0$; б) $(x - 4)(x - 6)(x + 1) < 0$;
в) $(x + 3)(x - 4)(x - 1) > 0$; г) $(x + 1)(x + 3)(x + 5) < 0$;
д) $(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 4)(x + 5)^3 > 0$;
е) $(x^2 - 4)(x^2 - 5x + 6)(x + 1)^5 < 0$;
ж) $(x^2 + 3)(x^2 + 3x - 4)^3(x - 1)^3 > 0$;
з) $(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)^3(x + 5)^5 < 0$.

84 а) $(|x| - 1)^2 > 2$; б) $|x| - 2 > (x - 2)^2$;
в) $x^2 < 2|x + 1|$; г) $3|x - 1| > (x - 1)^2$;
д) $x^2 + x - 12 < |x - 2|$; е) $(x + 2)|x + 3| > 1$.

85 (МГУ, ВМиК)
а) $||x^2 - 8x + 2| - x^2| \geqslant 2x + 2$; б) $||x^2 + 3x - 8| - x^2| \geqslant 8 - x$;
в) $||x^2 - 9x + 6| - x^2| \geqslant 6 - x$; г) $||x^2 + 5x - 18| - x^2| \geqslant 18 - x$.

86 а) $\frac{2x + 1}{x + 9} < 1$; б) $\frac{x + 5}{x - 4} > 1$; в) $\frac{x + 4}{x} < 1$;
г) $x + 7 < -\frac{16}{x - 1}$; д) $x < 7 - \frac{16}{x + 1}$; е) $x > \frac{2}{x - 1}$.

87 а) (МГУ, почв. ф-т). $4x+7\leqslant\dfrac{2}{x}$; б) (МГУ, хим. ф-т). $\dfrac{1}{x-1}>1$;

в) (МГУ, хим. ф-т). $\dfrac{x+1}{x-1}>3$; г) (МГУ, хим. ф-т). $\dfrac{x}{2x-1}<\dfrac{1}{3}$.

88 (МГУ, социол. ф-т)

а) $\dfrac{x-3}{3x}\geqslant\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{x-2}{2x}\leqslant\dfrac{1}{3}$.

89 (МГУ, биол. ф-т)

а) $\dfrac{2-3x}{x+2}\leqslant 5$; б) $\dfrac{3-4x}{x-1}\geqslant 2$.

90 (МГУ, геогр. ф-т)

а) $x\leqslant\dfrac{8x-2}{x+5}$; б) $\dfrac{6x+6}{x+7}\geqslant x$.

91 а) (МГУ, геол. ф-т). $\dfrac{1}{x-1996}\leqslant\dfrac{x}{x-1996}$;

б) (МГУ, физ. ф-т). $\dfrac{2x-7}{x-3}>\dfrac{9}{5-x}$;

в) (МГУ, геол. ф-т). $\dfrac{7}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{9}{x-3}+1\leqslant 0$.

92 а) $\dfrac{2x^2+x+2}{x^2-1}<0$; б) $\dfrac{x-2}{x^2-1}>\dfrac{2x}{x-1}$;

в) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x+1}>2$; г) $\dfrac{x^2-2x+10}{x^2-5x+4}<1$;

д) $\dfrac{(x-3)(x^2-3x+2)}{x^2+3x+2}>0$; е) $\dfrac{(x-2)(x^2-5x+6)}{x^2-5x+4}<0$.

93 (ВШЭ). а) $\dfrac{x^2-9}{(x+1)(x-3)}\geqslant 0$; б) $\dfrac{x^2-25}{(x+5)(x-4)}\geqslant 0$.

94 а) $\dfrac{4x^2+8x-5}{x+1}<0$; б) $\dfrac{1}{1-x}>\dfrac{3}{x+3}$;

в) $\dfrac{3x}{x^2+3x}\geqslant 1$; г) $\dfrac{x-4}{4x^2-4x-3}<0$;

д) $\dfrac{2x^2+x-15}{x+2}>0$; е) $x-1\geqslant\dfrac{x^2-5x-1}{x-1}$.

95 (МГУ, физ. ф-т). а) $\dfrac{x}{x-1}\leqslant\dfrac{x-2}{x}$; б) $\dfrac{2x}{x^2-4}\leqslant\dfrac{1}{x+1}$;

(МГУ, хим. ф-т). в) $\dfrac{4}{(x-1)^2}\geqslant 1$; г) $\dfrac{3x}{x^2+2}\geqslant 1$.

96 (МГУ, хим. ф-т). а) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} \leqslant 2$; б) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}} \leqslant 2$;

в) (МГУ, социол. ф-т). $\dfrac{x^2+1}{x} < \dfrac{1}{x} - 1$;

г) (МГУ, почв. ф-т). $3x^4 + 4 < 13x^2$.

97 (МФТИ)

а) $\dfrac{5}{2-x} > 1 + \dfrac{3}{x+2}$; б) $\dfrac{5}{x+4} < 1 + \dfrac{1}{4-x}$;

в) $\dfrac{2}{3-x} > 1 - \dfrac{1}{x+3}$; г) $\dfrac{7}{x+5} < 1 + \dfrac{2}{5-x}$.

98 (МГУЭСИ)

а) $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1} > \dfrac{x-5}{x-1}$. Укажите наибольшее целое решение неравенства.

б) $\dfrac{x^2-x-6}{(x+5)^2} < 1$. Укажите наименьшее целое решение неравенства.

в) $\dfrac{x^2+5x+1}{x^2+2x+4} \leqslant 1$. Укажите наибольшее целое решение неравенства.

99 (МГУ, социол. ф-т)

а) $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{x+2} > \dfrac{1}{2x+3}$; б) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2x+1} > \dfrac{1}{4x+1}$.

100 (МГУ, ИСАиА)

а) $|2x+3| > \dfrac{2}{2x+1}$; б) $|2x-3| > \dfrac{2}{x-2}$;

в) $|x+1| > \dfrac{2}{x-2}$; г) $|x+2| > \dfrac{1}{x-1}$.

101 (ВШЭ)

а) $\dfrac{|x^2-1|+x+1}{x(x-2)} \leqslant 0$; б) $\dfrac{2x-1}{x^2-|x-2|} > \dfrac{1}{2}$;

в) $\dfrac{x^2-1+|x+1|}{x(x-2)} \geqslant 0$; г) $\dfrac{|2x-1|}{x^2-x-2} > \dfrac{1}{2}$.

102 (МГУ, мехмат)

а) $\dfrac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|} < \dfrac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}$;

б) $\dfrac{|x-5|-|x+4|}{|x-2|-|x+1|} < \dfrac{|x-2|+|x+1|}{|x+4|}$.

Системы неравенств

103 (МГУЭСИ). Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x+10<1{,}5x+20 \\ 3x+4<2x+16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-9x+14<0 \\ x-4<0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+6x+5<0 \\ x^2+4x+3>0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2{,}3x-1{,}4<5x+2 \\ 3{,}5x+1{,}4<7x+2{,}8; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2-6x+8<0 \\ x-3>0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2-7x+10<0 \\ x^2-5x+4>0. \end{cases}$

104 Решите двойное неравенство:

а) $0<\dfrac{2}{x}\leqslant 2+\dfrac{3}{x+1}$; б) $0\leqslant\dfrac{6}{x-1}<1+\dfrac{2}{x-2}$.

105 (МФТИ). Найдите все пары целых чисел x и y, для которых верны неравенства:

а) $3y-x<5$, $x+y>26$, $3x-2y<46$;
б) $3y-5x>16$, $3y-x<44$, $3x-y>1$;
в) $3y-2x<45$, $x+y>24$, $3x-y<3$;
г) $y-3x<1$, $2y-3x>19$, $4y-x<78$.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

106 а) Второй член арифметической прогрессии равен 5, а пятый член равен 14. Найдите разность прогрессии.

б) Седьмой член арифметической прогрессии равен 20, а третий член равен 8. Найдите первый член.

в) Четвертый член арифметической прогрессии равен 11, а шестой член равен 17. Найдите второй член.

г) Сумма первого и четвертого членов арифметической прогрессии равна 20, а сумма второго и восьмого членов равна 40. Найдите разность прогрессии.

д) В арифметической прогрессии первый член равен 2, а разность прогрессии равна 3. Найдите сумму семи первых членов прогрессии.

е) Найдите сумму 12 первых членов арифметической прогрессии, если ее второй член равен 8, а десятый член равен 40.

ж) Найдите сумму десяти первых членов арифметической прогрессии, если сумма ее первого и седьмого членов равна 16, а разность между первым и седьмым членами равна –12.

107 Первый и последний члены арифметической прогрессии, имеющей 7 членов, равны 11 и 35 соответственно. Сколько членов в другой конечной арифметической прогрессии, первый и последний члены которой равны 38 и 13 соответственно, если четвертые члены этих прогрессий равны?

108 а) Найдите сумму первых ста натуральных чисел, которые при делении на 5 дают остаток 1.

б) Найдите сумму всех натуральных чисел, меньших 100, которые не кратны 5.

109 Сумма второго и двадцатого членов возрастающей арифметической прогрессии равна 10, а произведение этих 47 членов равно $23\frac{47}{64}$. Найдите сумму первых 16 членов этой прогрессии.

110 а) Найдите двадцатый член возрастающей арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 34$, а $a_2 \cdot a_5 = 52$.

б) Найдите разность арифметической прогрессии, если известно, что сумма первого и пятого ее членов равна 4, а разность квадратов второго и первого ее членов равна 1.

111 а) Пятый член геометрической прогрессии равен 32, а восьмой 256. Найдите второй член прогрессии.

б) Восьмой член геометрической прогрессии равен 256, а первый член равен 2. Найдите знаменатель прогрессии.

112 Произведение первого и седьмого членов геометрической прогрессии равно 729. Найдите четвертый член прогрессии.

113 Найдите сумму первых четырех членов возрастающей геометрической прогрессии, сумма первых трех членов которой равна 13, а второй член равен 3.

114 а) Первые три члена возрастающей арифметической прогрессии при некотором значении m могут быть представлены соответственно тремя выражениями: $m + 1$, $4m - 9$, $2m + 1$. На сколько больше сумма первых сорока трех членов этой прогрессии суммы первых сорока ее членов?

б) Первые три члена убывающей арифметической прогрессии при некотором значении n могут быть представлены соответственно тремя выражениями: $n + 3$, $6n - 11$, $3n - 9$. На сколько меньше сумма первых тридцати членов этой прогрессии суммы первых двадцати семи ее членов?

115 а) Последовательность $\{a_n\}$ задана формулой общего члена $a_n = 1{,}5n - 6$. Сколько членов этой последовательности, начиная с первого, надо сложить, чтобы получить сумму, равную 33?

б) Последовательность $\{a_n\}$ задана формулой общего члена $a_n = 18 - 0{,}25n$. Найдите сумму двадцати первых ее членов.

116 (МГУ, геогр. ф-т)

а) Сумма первых пяти членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15, а их произведение равно 1155. Найдите шестидесятый член прогрессии.

б) Сумма первых пяти членов убывающей арифметической прогрессии равна 5, а их произведение равно 280. Найдите семидесятый член прогрессии.

117 (МГУ, мехмат)
а) Сумма членов конечной геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель положителен, равна $\frac{40}{27}$, а сумма тех же членов с чередующимися знаками (первый — со знаком «плюс», второй — со знаком «минус» и т. д.) равна $\frac{20}{27}$. Найдите знаменатель прогрессии.
б) Сумма членов конечной геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель положителен, равна $\frac{21}{16}$, а сумма тех же членов с чередующимися знаками (первый — со знаком «плюс», второй — со знаком «минус» и т. д.) равна $\frac{13}{16}$. Найдите знаменатель прогрессии.

118 (РЭА). а) В арифметической прогрессии четвертый член равен 10. При каком значении разности прогрессии сумма квадратов второго и пятого членов этой прогрессии будет наименьшей?
б) Сумма утроенного второго и четвертого членов арифметической прогрессии равна 12. При каком значении разности прогрессии произведение третьего и пятого членов прогрессии будет наименьшим?
в) Разность второго и удвоенного пятого членов арифметической прогрессии равна –2. При каком значении разности прогрессии произведение третьего и четвертого членов этой прогрессии будет наименьшим?
г) В арифметической прогрессии третий член равен 6. При каком значении разности этой прогрессии сумма попарных произведений первых трех членов прогрессии будет наименьшей?

119 (МГУ. псих. ф-т). а) Рассматриваются геометрические прогрессии, у каждой из которых первый член равен 10, сумма первого и третьего членов — целое число, кратное четырем и не превосходящее 1000, а знаменатель больше 1. Укажите знаменатели всех таких прогрессий.
б) Рассматриваются геометрические прогрессии, у каждой из которых третий член равен 8, сумма первого и второго членов — целое число, кратное пяти и не превосходящее 500, а знаменатель больше нуля и меньше 1. Укажите знаменатели всех таких прогрессий.

Логарифмы

Вычислите (120—126):

120 а) $6^{\log_{36} 81}$; б) $5^{\log_{25} 36}$; в) $2^{\log_{0,5} 3}$.

121 (ВАХЗ). а) $3^{\log_3 21} - 9^{0,5}$; б) $81^{\frac{1}{\log_5 9}}$.

122 (РГОТУПС). $\log_4 25 - 2\log_4 5$.

123 а) $\dfrac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 3{,}6 + 1}$; б) $\dfrac{\lg 5 + \lg 4}{\lg 16 + \lg 25}$; в) $\dfrac{\lg 12 - \lg 3}{\lg 8}$;

г) $\dfrac{\lg 16 + \lg 4}{\lg 48 - \lg 3}$; д) $\dfrac{2\lg 6 - \lg 3}{\lg 144}$; е) $\dfrac{2\lg 2 + \lg 3}{\lg 48 - \lg 4}$.

124 а) $\log_2 225 - \dfrac{2}{\log_5 2} - \log_2 9 + 5^{\frac{1}{\log_9 25}}$;

б) $6^{-\frac{1}{2} + \log_6 \frac{\sqrt{3}}{2}} - 2^{-\frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{2}}$.

125 (МГАХМ). а) $\log_6 4 + \log_6 9 + \log_4 6 \cdot \log_{\sqrt{6}} 2 + 5^{\log_5 2}$;

б) $\log_4 100 + \log_2 12 - 2\log_2 \sqrt{30} + 3^{\log_3 4}$;

в) $\log_4 36 + \log_2 10 - 2\log_2 \sqrt{15} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 5}$.

126 (РЭА). а) $5^{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}} \dfrac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} + \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{10 + 2\sqrt{21}}$;

б) $\dfrac{\left(9^{\log_3\left(3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} - 25^{\log_{\frac{1}{5}} \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 1}}\right) \cdot 2^{\log_5 3\sqrt{5}}}{3^{\log_5 10}}$;

в) $(\sqrt[3]{3})^{\frac{-1}{\log_{64} \frac{1}{3}}} + \dfrac{1}{4} \cdot \log_5 (12 - 2\sqrt{35}) - \log_{\frac{1}{25}} \dfrac{25}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$;

г) $\dfrac{7^{\log_3 15}}{5^{\log_3 7 + \log_5 2}} + 3^{\log_{\sqrt{3}}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} + 4^{\log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 1}}$;

д) $\dfrac{3^{\log_5 20}}{4^{\log_5 3 + \log_2 3}} + 25^{\log_5\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} + 2^{\log_{\sqrt{2}}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$;

е) $\dfrac{\left(4^{\log_2 (5 - \sqrt{3})} - 7^{\log_{\sqrt{7}} (5 + \sqrt{3})}\right) \cdot 5^{\log_2 1,5}}{3^{\log_2 5\sqrt{2}}}$.

Выразите через a и b **(127—128)**:

127 а) (МГСУ). $\log_8 9{,}8$, если $\lg 2 = a$, $\lg 7 = b$;
б) (МТУСИ). $\log_{175} 56$, если $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$.

128 (МФТИ). а) $\log_{600} 900$, если $a = \log_5 2$ и $b = \log_2 3$;
б) $\log_{140} 350$, если $a = \log_7 5$ и $b = \log_5 2$;
в) $\log_{300} 120$, если $a = \log_2 3$ и $b = \log_3 5$;
г) $\log_{490} 700$, если $a = \log_2 7$ и $b = \log_7 5$.

Вычислите **(129—130)**:

129 (ВШЭ). а) $\log_{b^2}(a^2b^2)$, если $\log_a b = 2$;
б) $\log_{b^3}(a^3b^3)$, если $\log_a b = 3$;
в) $\log_{b^4}(a^4b^4)$, если $\log_a b = 4$;
г) $\log_{b^5}(a^5b^5)$, если $\log_a b = 5$.

130 (МГУ, биол. ф-т). а) $\log_{b^3 \sqrt[7]{a^5}}\left(\dfrac{\sqrt[7]{a}}{b\sqrt{b}}\right)$, если $\log_b a = \sqrt{3}$;
б) $\log_{d^4 \sqrt[5]{c^6}}\left(\dfrac{c\sqrt[3]{c}}{\sqrt[5]{d}}\right)$, если $\log_d c = \sqrt{5}$.

131 Сравните, не пользуясь таблицами и калькулятором:
а) $\log_3 25$ и $\log_2 11$; б) $\log_4 60$ и $\log_3 30$;
в) $\log_4 75$ и $\log_2 22$; г) $\log_2 20$ и $\log_3 70$;
д) $\log_4 3$ и $\log_3 2$; е) $\log_3 5$ и $\log_5 7$.

Показательные уравнения

Решите уравнение **(132—146)**:

132 а) $2^x = 4$; б) $3^x = 27$; в) $5^x = 1$;
г) $5^x = 25^3$; д) $4^x = 16^5$; е) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x = 1$.

133 а) $10^x = 0{,}01$; б) $10^x = 0{,}00001$;
в) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^x = 100$; г) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^x = 1000$.

134 а) $2^{x+1} + 2^x = 6$; б) $3^{x+1} - 3^x = 6$;
в) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 56$; г) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x-1} = 11$;
д) $3^{x+1} + 4 \cdot 3^{x-1} = 39$; е) $3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$.

135 а) $3^{x+1} + 3^x = 108$; б) $2^{x+3} - 2^x = 112$.

136 а) (МГУЭСИ). $33 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} = 29$;
б) $33 \cdot 3^{x-2} + 3^{x+1} = 60$.

137 а) (РГОТУПС). $3^{x+2}+3^{x+1}-3^x=99$;
б) (РГАЗУ). $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-1}-4\cdot 3^{x-2}=17$.

138 а) (МГУГК). $3^{2x-1}+3^{2x-2}-3^{2x-4}=315$;
б) (МГАВТ). $81^{x-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}+\left(\frac{1}{3^x}\right)^{-2}+2\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=0$.

139 а) $4^{2x}-7\cdot 4^x+16=0$; б) $4+2^x=2^{2x-1}$;
в) $2^{2x+1}+2^{x+2}-16=0$; г) $2^{2x+1}-9\cdot 2^x+4=0$.

140 а) (РЭА). $2\cdot 4^{2x}+8=17\cdot 4^x$;
б) $2\cdot 9^{2x}-27=15\cdot 9^x$; в) $9^x-8\cdot 3^{x+1}-81=0$;
г) $9^{x+1}+3^{x+2}-18=0$; д) $2\cdot 16^x+7\cdot 4^x-4=0$;
е) (РГОТУПС). $2\cdot 16^x-7\cdot 4^x-4=0$.

141 а) $4^x+\dfrac{6}{4^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}}=4$; б) $\dfrac{1}{2}+16^x=\dfrac{6}{16^{\frac{1}{2}+x}}$.

142 а) $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0$; б) $3^{2x}+8\cdot 3^x-9=0$.

143 а) (МГУ, хим. ф-т). $4^x-5\cdot 2^x+4=0$;
б) (МГУ, хим. ф-т). $4^x+2^x-2=0$;
в) (МГУ, хим. ф-т). $9^x+2\cdot 3^x-3=0$;
г) (МГУ, почв, ф-т). $4^x-2^x=56$.

144 а) (МГУ, физ. ф-т). $9^{x+1}+3^{x+2}-18=0$;
б) (МГУ, почв, ф-т). $5^{2x}=115\cdot 5^{x-1}+50$;
в) (МГУ, физ. ф-т). $5^{x-1}+5\cdot(0{,}2)^{x-2}=26$;
г) (МГУ, почв. ф-т). $3^y-\dfrac{77}{3^y}=76$.

145 (МГУ, физ. ф-т). $25^x-24\cdot 5^{x-1}-5^{\log_5 3}+2=0$.

146 (РЭА). а) $7^{x-2}+38\cdot 3^x=7^{x+1}$; б) $5^{x-1}+5^{x+2}=70\cdot 3^x$;
в) $2^{x+1}-2^{x-1}=3^{2-x}$; г) $3^{x-1}-3^{x+1}+2^{4-x}=0$.

Логарифмические уравнения

Решите уравнение **(147—154)**:

147 (МГУЭСИ)
а) $\log_5\log_3 x=1$; б) $\log_5\log_2 x=1$.

148 (МГАТХТ)
а) $\log_2\log_4 x=1$; б) $\log_2\log_5 x=1$.

149 (МГУЭСИ)
а) $x\cdot\lg 10^{x+3}+\lg 100=0$; б) $x\cdot\lg 10^{x-4}+\lg 10\,000=0$.

150 а) $2\log_{\frac{1}{2}}\log_2 x + \log_2\log_2 x = -1$;

б) $3\log_{\frac{1}{3}}\log_3 x + \log_3\log_3 x = -2$.

151 а) $(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 3 = 0$;

б) (МГУ, хим. ф-т). $(\log_3 x)^2 + 4\log_{\frac{1}{3}} x + 3 = 0$.

152 а) (МГУ, геол. ф-т). $\log_3 x \cdot (5 - 2\log_3 x) = 3$;

б) (МГУ, хим. ф-т). $(\log_2 x)^2 + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0$;

в) (МГУ, физ. ф-т). $\left(\frac{1}{2}\log_3 x - 6\right) \cdot \log_9 x = 4(2 - \log_9 x)$.

153 а) $\log_2 x \cdot \log_3 x = 4\log_3 2$;

б) $\log_3 x \cdot \log_4 x = 4\log_4 3$;

в) $\log_{0,5} x \cdot \log_{0,6} x = \log_{0,36} 0{,}25$;

г) $\log_{0,04} x \cdot \log_{0,4} x = \frac{1}{4}\log_{0,4} 0{,}04$.

154 (РГАЗУ). $\lg x + \frac{4}{\lg x} = 2\lg 100$.

Показательные неравенства

Решите неравенство (155—162):

155 а) $4^x + 2^{x+1} - 24 \leqslant 0$; б) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 \leqslant 0$;

в) $81^x - 3^{2x+1} \leqslant 4$; г) $4^x + 2^{x+1} \leqslant 3$.

156 а) (МГУ, физ. ф-т). $4^{x-0,5} + 2^{x+1} - 16 < 0$;

б) (МГУ, ИСАА). $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^{x+1} - 5 \leqslant 0$;

в) (МГУ, геол. ф-т). $25^{-x} - 5^{-x+1} \geqslant 50$.

157 а) $\frac{1}{2^x - 1} \geqslant \frac{1}{4^x - 3}$; б) $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geqslant 0$;

в) $\frac{7}{9^x - 2} \geqslant \frac{2}{3^x - 1}$; г) $4^{4x+5} - 15 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{4x+3} + 8 \geqslant 0$.

158 (МГУ, хим. ф-т). $(\sqrt{2} + 1)^x + 1 < 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)^x$.

159 (МГУГК). $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

160 а) (ОГАПС). $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} > 29$; б) $2^{x+1} + 32 \cdot 2^{-x} > 20$.

161 а) $3^{2x+2} - 3^{x+4} < 3^x - 9$; б) $2^{2x+2} - 2^{x+2} < 2^x - 1$.

162 (РЭА). а) $4^x \geqslant \dfrac{2 \cdot 4^{x+1} + 16}{16 - 4^x}$. Укажите наименьшее решение.

б) $\dfrac{53 \cdot 3^x - 243}{3^{x+1} - 1} \geqslant 3^x$. Укажите наибольшее решение.

в) $2^x + \dfrac{2^{x+2} + 4}{2^x - 8} \geqslant 0$. Укажите наименьшее решение.

г) $4^x \leqslant \dfrac{15 \cdot 4^x - 16}{4^{x+1} - 1}$. Укажите наибольшее решение.

Логарифмические неравенства

Решите неравенство (**163—168**):

163 а) $\log_2 x > 1$; б) $\log_3 x > 1$; в) $\log_3 x < 1$;
г) $\log_4 x < 1$; д) $\log_3 x > 0$; е) $\log_5 x < 0$.

164 а) $\log_{\frac{1}{2}} x > 1$; б) $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$; в) $\log_{\frac{1}{3}} x < 1$;
г) $\log_{\frac{1}{4}} x < 1$; д) $\log_{\frac{1}{3}} x > 0$; е) $\log_{\frac{1}{5}} x < 0$.

165 а) $\log_2 \log_3 x > 0$; б) $\log_3 \log_{\frac{1}{2}} x > 0$;
в) $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 x > 0$; г) $\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} x > 0$.

166 а) $\log_2 \log_3 x < 0$; б) $\log_3 \log_{\frac{1}{2}} x < 0$;
в) $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 x < 0$; г) $\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} x < 0$.

167 а) $4 \log_4 x - \dfrac{33}{\log_4 x} \leqslant 1$; б) $\log_2 x - \dfrac{2}{\log_2 x} \geqslant 1$;
в) $\log_7 x + \dfrac{1}{\log_7 x} > 2$; г) $\log_5 x + \dfrac{2}{\log_5 x} < 3$.

168 (МТИТФ). а) $\dfrac{1}{\log_2 x - 4} > \dfrac{1}{\log_2 x}$; б) $\dfrac{1}{\log_3 x - 2} \geqslant \dfrac{1}{\log_3 x}$;
в) $\dfrac{1}{3 + \log_4 x} < \dfrac{1}{\log_4 x}$; г) $\dfrac{1}{1 - \log_{0,5} x} \leqslant -\dfrac{1}{\log_{0,5} x}$.

169 Найдите наибольшее целое решение неравенства:
а) $\dfrac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3} 100 - \log_{0,3} 9} < 1$; б) $\dfrac{\log_{0,2}(x+1,5)}{\log_{0,2} 100 - \log_{0,2} 4} < 1$.

Упростите выражение (170—173)[1]:

170 а) $\sin(\pi-\alpha)$; б) $\sin(\pi+\alpha)$; в) $\cos(\pi-\alpha)$;
г) $\cos(\pi+\alpha)$; д) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$; е) $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$;
ж) $\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)$; з) $\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)$.

171 а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;
г) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; д) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; е) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;
ж) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; з) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

172 а) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;
г) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; д) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; е) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;
ж) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; з) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

173 а) $\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;
б) $\sin(90^\circ-\alpha)-\cos(180^\circ-\alpha)-\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)+\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)$.

Вычислите (174—178):

174 а) $\sin 135^\circ$; б) $\sin 210^\circ$; в) $\sin(-120^\circ)$; г) $\sin(-150^\circ)$.

175 а) $\cos 120^\circ$; б) $\cos 240^\circ$; в) $\cos(-300^\circ)$; г) $\cos(-135^\circ)$.

176 а) $\operatorname{tg} 225^\circ$; б) $\operatorname{tg} 120^\circ$; в) $\operatorname{tg}(-135^\circ)$; г) $\operatorname{tg}(-150^\circ)$.

177 а) $\operatorname{ctg} 150^\circ$; б) $\operatorname{ctg} 135^\circ$; в) $\operatorname{ctg}(-210^\circ)$; г) $\operatorname{ctg}(-225^\circ)$.

178 а) $20\sin 330^\circ\cos(-240^\circ)\operatorname{tg} 120^\circ-2\cos 150^\circ\operatorname{tg}(-135^\circ)$;
б) $\cos 20^\circ+\cos 40^\circ+\cos 60^\circ+\ldots+\cos 160^\circ+\cos 180^\circ$;
в) $\operatorname{tg} 20^\circ+\operatorname{tg} 40^\circ+\operatorname{tg} 60^\circ+\ldots+\operatorname{tg} 160^\circ+\operatorname{tg} 180^\circ$.

179 Упростите выражение:
а) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\operatorname{tg}\alpha$;
в) $1+\cos\alpha-\frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$; г) $1+\sin\alpha-\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$.

[1] Здесь и далее рассматриваются выражения, которые имеют смысл.

180 (РЭА). Упростите выражение:

а) $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{8\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}$; б) $21{,}5 - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha + \cos 2\alpha$;

в) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$;

г) $4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha - \dfrac{7}{2}$.

181 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{1-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$, если $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\dfrac{1-\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, если $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\left(1+\dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}\right)$, если $\alpha = 210°$;

г) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, если $\alpha = 240°$.

Найдите значения **(182—183)**:

182 а) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ и $0{,}5\pi < \alpha < \pi$;

б) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{9}{41}$ и $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$.

183 а) $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

б) $\operatorname{tg}\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{5}{12}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

в) $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$ и $0{,}5\pi < \alpha < \pi$;

г) $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{4}{3}$ и $0{,}5\pi < \alpha < \pi$;

д) $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ и $0{,}5\pi < \alpha < \pi$;

е) $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ и $1{,}5\pi < \alpha < 2\pi$.

184 Докажите справедливость равенства:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}(90° + \alpha)\cos(270° + \alpha)\cos(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(180° - \alpha)\sin(270° + \alpha)\sin(-\alpha)} = 1$;

б) $\dfrac{\cos^2(270° + \alpha)}{\operatorname{tg}^2(\alpha - 360°)} + \dfrac{\cos^2(-\alpha)}{\operatorname{tg}^2(\alpha - 270°)} = 1$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)\cos(\alpha-2\pi)\cos(2\pi-\alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\sin^2\alpha$;

г) $\dfrac{\sin(\alpha+\pi)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}=\operatorname{ctg}^2\alpha$.

185 Вычислите:

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;

б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ и $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

Упростите выражение (186—188):

186 а) $\operatorname{tg}(\alpha-\pi)-\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{1+\cos(-\alpha)}$; б) $\operatorname{tg}(\alpha+\pi)-\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{1-\sin(-\alpha)}$.

187 а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$; б) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

в) $\cos 2\alpha : (\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)$; г) $(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)\sin 2\alpha$.

188 а) $\dfrac{2\sin^2\alpha}{1+\cos(\pi-2\alpha)}-\sin^2\alpha$; б) $\dfrac{2\cos^2\alpha}{1-\sin(1{,}5\pi+2\alpha)}-\cos^2\alpha$;

в) $\dfrac{\sin(0{,}5\pi+2\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\cos^2\alpha$; г) $\dfrac{\cos(2\pi-2\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}-\sin^2\alpha$.

189 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{1+\cos 2x-\sin 2x}{\cos x+\cos(0{,}5\pi+x)}$, если $\cos x=-0{,}5$;

б) $\dfrac{1-\cos 2x+\sin 2x}{\cos x-\sin(2\pi-x)}$, если $\sin x=-0{,}5\sqrt{3}$.

190 Докажите справедливость равенства:

а) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\dfrac{\cos(2\pi-\alpha)-\sin(-\alpha)}{\sin(0{,}5\pi-\alpha)+\sin(\pi+\alpha)}$;

б) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{\cos(0{,}5\pi-\alpha)-\cos(\pi-\alpha)}{\cos(-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)}$.

191 Найдите значение выражения:

а) $2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)+\dfrac{2\sin(\pi-\alpha)}{\sin(0{,}5\pi+\alpha)+\operatorname{tg}\alpha\sin(-\alpha)}$, если $\alpha=-\dfrac{\pi}{12}$;

б) $\cos(-2\alpha)+\dfrac{2\sin(\pi-2\alpha)}{\operatorname{ctg}(0{,}5\pi+\alpha)+\operatorname{ctg}\alpha}$, если $\alpha=\dfrac{\pi}{8}$.

192 Вычислите:

а) $\sin 2\alpha$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

б) $\cos 2\alpha$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

в) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;

г) $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ и $1{,}5\pi < \alpha < 2\pi$;

д) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{4}{3}$ и $0 < \alpha < 0{,}5\pi$;

е) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg} 2\alpha = -2{,}4$ и $0 < \alpha < 0{,}5\pi$.

193 (МГУ, геол. ф-т). Вычислите:

а) $\operatorname{tg} 2x$, если $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{5}$; б) $\operatorname{tg} 8x$, если $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{4}$;

в) $\operatorname{tg} 4x$, если $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$.

194 (РЭА). Вычислите:

а) $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -(\sqrt{3} + 2)$, $\alpha \in \left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$;

б) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2 + \sqrt{3}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$;

в) $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - 2$;

г) $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = 2 - \sqrt{3}$;

д) $\sin\alpha$, если $\sin 2\alpha = -0{,}96$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{4};\ \pi\right)$;

е) $\cos\alpha$, если $\sin 2\alpha = 0{,}96$, $\alpha \in \left(\pi;\ \frac{5\pi}{4}\right)$;

ж) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin 2\alpha = -0{,}8$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4}\right)$;

з) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$; $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{4};\ \pi\right)$;

и) $\sqrt{20}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\alpha \in \left(\pi;\ \frac{4\pi}{3}\right)$;

к) $\sqrt{30}\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

195 Докажите справедливость равенства:

а) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; б) $\dfrac{\sin 2x - \sin x}{2\cos x - 1} = \sin x$;

в) $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{2\sin(1{,}5\pi + 2x)} = -\sin x$; г) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x\cos^2 x - \cos^2 x}{\cos 2x} = -1$.

196 Упростите выражение:

а) $\sin\left(\dfrac{5}{3}\pi + x\right) - \sin\left(\dfrac{4}{3}\pi + x\right)$; б) $\cos\left(\dfrac{4}{3}\pi + x\right) + \cos\left(\dfrac{2}{3}\pi + x\right)$;

в) $\dfrac{\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin(\alpha + \pi)}$; г) $\dfrac{\sqrt{3}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)}$;

д) $\dfrac{\sin(0{,}5\pi + x) + \cos(\pi - 3x)}{1 - \cos(-2x)}$; е) $\dfrac{\cos(1{,}5\pi + 6x) - \sin(-2x)}{1 + \cos(-4x)}$.

197 Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos 2x\,(1 - \cos 2x)}{\sin 3x - \sin x}$; б) $\dfrac{\sin 2x\,(1 + \cos 2x)}{\sin 3x + \sin x}$.

Укажите множество всех значений x, при которых данное выражение не имеет смысла.

Тригонометрия. Решение уравнений

198 Образуют ли арифметическую прогрессию расположенные в порядке возрастания положительные корни уравнения:

а) $\sin x = 0$; б) $\cos x = 0$; в) $\operatorname{tg} x = 1$;
г) $\operatorname{ctg} x = -1$; д) $\cos x = 0{,}5$; е) $\sin x = 0{,}5$?

Решите уравнение (**199—207**):

199 а) $1 - 4\sin^2\left(5x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$; б) $3 - 4\sin^2\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$;

в) $3 - 4\cos^2\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$; г) $1 - 2\cos^2\left(4x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

200 а) $\cos^2 x - \cos 2x = \sin x$; б) $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$;
в) $3\cos 2x = 4 - 11\cos x$; г) $2\cos^2 x - 7\cos x = 2\sin^2 x$.

201 а) $5 - 3\cos 2x = 8\sin x$; б) $\cos 2x + \sin x = 1$;
в) $\cos 2x + 6\sin x - 5 = 0$; г) $\cos 2x - 5\sin x + 6 = 0$.

202 а) (МГУ, почв. ф-т). $\cos 2x = \sin x$;
б) (МГУ, псих. ф-т). $3\cos^2 x + 4\sin x = 0$;
в) (МГУ, хим. ф-т). $8\cos 2x + 16\cos x + 7 = 0$.

203 (МГУ, хим. ф-т)
а) $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0$; б) $\cos 5x + \sin x \sin 4x = 0$.

204 (МГУ, биол. ф-т)
а) $3 \cos 2x + 4 + 11 \sin x = 0$; б) $1 - 8 \cos x = 6 \cos 2x$.

205 (РЭА). а) $3 \sin^2 x + \cos 2x - 1 = 0$. В ответе укажите число корней уравнения, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$.
б) $5 \sin x + \cos 2x = 1$. В ответе укажите число корней уравнения, принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$.
в) $\cos \frac{x}{3} = 2 \cos \frac{x}{6} - 1$. В ответе укажите число корней уравнения, принадлежащих отрезку $[0; 4\pi]$.
г) $1 - \sin \frac{x}{6} = \cos \frac{x}{3}$. В ответе укажите число корней уравнения, принадлежащих отрезку $[0; 6\pi]$.

206 а) (МГУ, геогр. ф-т). $2 \cos 4x - 4 \sin 2x = -1$;
б) (МГУ, геогр. ф-т). $3 \cos 4x - 5 \sin 2x = -1$;
в) (МГУ, биол. ф-т). $8 \cos 6x - 12 \sin 3x = 3$;
г) (МГУ, биол. ф-т). $5 \cos 4x - 6 \sin 2x = -2$.

207 а) $\cos^2 6x - \sin^2 3x - 1 = 0$; б) $\cos^2 4x + \sin^2 2x - 1 = 0$;
в) (МГУ, почв. ф-т). $6 \sin^2 x + \cos 2x - 3 = 0$;
г) (МГУ, геол. ф-т). $\cos 7x + 2 \cos \frac{7x}{2} = \frac{1}{2}$;
д) (МГУ, почв. ф-т). $\sin^3 x - \cos^3 x + \sin x - \cos x = 0$.

Задачи на проценты

208 (МГУЭСИ). За ремонт холодильника заплатили 600 р., из них 40% заплатили за работу, остальное — за запасные части. Сколько стоили запасные части?

209 а) 250 г соли растворили в 750 г воды. Какова процентная концентрация раствора?
б) Из 225 кг руды получается 34,2 кг меди. Каково процентное содержание меди в руде?
в) Из 40 т руды выплавили 30 т металла. Сколько процентов примесей в металле?

210 Масса изюма, получаемого при сушке винограда, составляет 32% массы винограда. Сколько килограммов винограда надо взять, чтобы получить 2 кг изюма?

211 На сколько процентов снижена цена, если:
а) ручка до снижения цен стоила 3 р., а после снижения — 2,7 р.;
б) товар стоил 6,9 р., а после снижения цен — 6,21 р.?

212 а) При продаже товара за 138,6 р. получено 10% прибыли. Определите себестоимость товара.
б) Кооператив при продаже своей продукции за 309,6 р. имел 4% убытка. Определите себестоимость этой продукции.

213 На заводе 35% всех рабочих — женщины, а остальные — мужчины. Мужчин на 252 человека больше, чем женщин. Определите общее число рабочих на заводе.

214 а) Сторону квадрата увеличили в 2 раза. На сколько процентов увеличилась площадь квадрата?
б) Ребро куба увеличили в 2 раза. На сколько процентов увеличился объем куба?
в) На сколько процентов уменьшится объем прямоугольного параллелепипеда, если все его ребра уменьшить на 10%?

215 За 5 одинаковых тетрадей и блокнот заплатили 4 р. Сколько стоит одна тетрадь, если ее стоимость составляет 20% от стоимости блокнота?

216 В спортивной секции девочки составляют 60% от числа мальчиков. Сколько процентов от числа всех участников секции составляют девочки?

217 В первый месяц бригада перевыполнила задание на 10%, а во второй — на 20%. На сколько процентов бригада перевыполнила план двух месяцев?

218 Цена доллара в рублях увеличилась на 25%. На сколько процентов при этом уменьшилась цена рубля в долларах?

219 Яблоки содержали 80% воды. При сушке они потеряли 60% от своей массы. Сколько процентов воды содержат сушеные яблоки?

220 (МГТУ). Завод изготовил две партии изделий, при этом затраты на изготовление первой партии оказались на 20%, а второй партии — на 25% больше, чем планировалось. Таким образом, общие затраты превысили планируемые на 23% и составили 246 000 р. Какие затраты планировались на изготовление каждой партии?

221 (ВШЭ). Масса бороды Карабаса-Барабаса составляет 40% от его массы. Буратино остриг ему часть бороды, после чего масса оставшейся части бороды стала составлять 10% от его массы. Какую часть бороды остриг Буратино?

222 (ВШЭ). Два брата купили акции одного достоинства на сумму \$ 3640. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму \$ 3927. Первый брат продал 75% своих акций, а второй — 80% своих. При этом сумма, полученная от продажи акций вторым братом, превышает сумму от продажи акций первым братом на 140%. На сколько процентов возросла цена акции?

223 (МГУ, социол. ф-т)
а) В городе N в течение двух лет наблюдался рост числа жителей. За второй год процент роста числа жителей города N увеличился на 1 по сравнению с процентом роста числа жителей за первый год. Найдите процент роста числа жителей за первый год, если известно, что он на 5,2 меньше, чем процент роста населения за два года.
б) В городе N в течение двух лет наблюдался рост числа жителей. За второй год процент роста числа жителей увеличился на 1 по сравнению с процентом роста числа жителей за первый год. Найдите процент роста числа жителей за второй год, если известно, что он на 5,3 меньше, чем процент роста населения за два года.

224 (СГУ). В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найдите это число, если в начале года завод выпускал ежемесячно 600 изделий, а в конце года стал выпускать ежемесячно 726 изделий.

Задачи на сплавы и смеси

225 а) Сплав меди с цинком массой 5 кг, содержащий 10% цинка, сплавили с 5 кг чистой меди. Определите процентное содержание цинка в полученном сплаве.
б) В 2 л 10%-ного раствора уксусной кислоты добавили 8 л чистой воды. Определите процентное содержание уксусной кислоты в полученном растворе.
в) В 1 л 10%-ного раствора поваренной соли добавили 4 л чистой воды. Определите процентное содержание соли в полученном растворе.

226 Сплав массой 2 кг состоит из серебра и меди, причем масса серебра составляет $14\frac{2}{7}\%$ от массы меди.
а) Сколько килограммов серебра в данном сплаве?
б) Сколько килограммов меди в данном сплаве?

227 а) Сколько граммов чистого спирта надо прибавить к 735 г 16%-ного раствора йода в спирте, чтобы получить 10%-ный раствор?
б) Сколько литров воды нужно выпарить из 20 л раствора, содержащего 80% воды, чтобы получить раствор с содержанием воды 75%?

228 а) Сплав золота и серебра, имеющий массу 40 кг и содержащий золота на 20 кг меньше, чем серебра, сплавили с 60 кг чистого серебра. Определите процентное содержание золота в полученном сплаве.
б) Сплав меди с оловом массой 10 кг, содержащий меди на 2 кг больше, чем олова, сплавили с 10 кг чистой меди. Определите процентное содержание меди в полученном сплаве.

229 а) Из 38 т сырья второго сорта, содержащего 25% примесей, после переработки получено 30 т сырья первого сорта. Сколько процентов примесей содержит сырье первого сорта?
б) Из 40 т руды выплавляется 20 т металла, содержащего 6% примесей. Сколько процентов примесей содержится в руде?

230 (МГИЭТ). Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1 : 2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2 : 3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении 17 : 27?

231 **Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона.** Даны три металлических сплава. Один фунт первого сплава содержит 12 унций серебра, 1 унцию меди и 3 унции олова. Фунт второго сплава содержит 1 унцию серебра, 12 унций меди и 3 унции олова. Фунт третьего сплава содержит 14 унций меди, 2 унции олова и вовсе не содержит серебра. Из каких трех сплавов нужно составить новый, фунт которого содержал бы 4 унции серебра, 9 унций меди и 3 унции олова?

232 **Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона.** Некто покупает 40 мер пшеницы, 24 ячменя и 20 овса за 15 фунтов 12 шиллингов[1]. Затем он производит вторую закупку тех же сортов в 26 мер пшеницы, 30 ячменя и 50 овса за 16 фунтов. Наконец, он делает третью закупку тех же сортов в 24 меры пшеницы, 120 ячменя и 100 овса за 34 фунта. Спрашивается цена меры каждого рода зерновых.

233 (РЭА). а) Имелось два раствора кислоты в воде: 60%-ный и 20%-ный. Первую смесь получили из некоторого количества первого раствора и 15 л второго, а вторую смесь — из прежнего количества первого и 5 л второго. Сколько литров первого раствора использовали для приготовления каждой смеси, если концентрация кислоты в первой смеси вдвое меньше концентрации воды во второй?
б) Имеется два слитка, содержащие 40% и 80% цинка. Первый сплав получили из 5 кг первого слитка и некоторого количества второго, а второй сплав получили из 3 кг первого слитка и прежнего количества второго. Сколько килограммов второго слитка использовано для приготовления каждого сплава, если содержание цинка в первом сплаве на 5% меньше, чем во втором, и вес второго слитка не превышает 8 кг?
в) Имеется два слитка меди и цинка, второй из которых содержит 70% меди. Первый сплав, содержащий 45% цинка, получили из 5 кг первого слитка и некоторого количества второго, а второй сплав, содержащий 50% меди, получили из 10 кг первого слитка и прежнего количества второго. Каково процентное содержание меди в первом слитке?

---

[1] 1 фунт = 20 шиллингов (английские денежные единицы).

г) Имеется два слитка меди и серебра, содержащие 60% и 40% меди соответственно. Первый сплав получили, взяв 15 кг первого слитка и некоторое количество второго. Второй сплав получили, взяв 20 кг первого слитка и прежнее количество второго слитка. Сколько килограммов второго слитка использовано для приготовления каждого сплава, если концентрация меди в первом сплаве относится к концентрации серебра во втором как 5 : 4?

234 (РЭА). а) Если два сплава золота сплавить в отношении 3 : 7, то получится сплав, содержащий 87% золота. Если же эти сплавы сплавить в отношении 7 : 3, то получится сплав, содержащий 83% золота. Найдите процентное содержание золота в первом сплаве.

б) Если два раствора соли смешать в отношении 2 : 3, то получится раствор, содержащий 6,8% соли. Если же эти растворы смешать в отношении 3 : 2, то получится раствор, содержащий 6,2% соли. Найдите процентное содержание соли во втором растворе.

235 (РЭА). а) Имеется два раствора кислоты в воде: 40% и 60%. Смешав эти растворы и добавив 5 л воды, получили 20%-ный раствор. Если бы вместо воды добавили 5 л 80%-ного раствора, то получился бы 70%-ный раствор. Сколько литров 60%-ного раствора было первоначально?

б) Имеется два раствора спирта в воде. Если смешать весь первый раствор и 4 л второго, добавив 1 л воды, то получится 44%-ный раствор. Если смешать весь первый раствор и 2 л второго, добавив 3 л 90%-ного раствора, получится 64%-ный раствор. Каково процентное содержание спирта во втором растворе, если первый раствор содержит 60% спирта?

236 (МГУ, ВМиК). а) Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После испарения из раствора двух литров воды концентрация соли возросла на 20%, а после разведения получившегося раствора десятью литрами воды концентрация соли стала в 2 раза меньше первоначальной. Найдите концентрацию соли в исходном растворе, считая массу 1 л воды равной 1 кг.

б) Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После добавления в раствор трех литров воды концентрация соли уменьшилась на 15%, а после испарения из получившегося раствора пяти литров воды концентрация соли стала в 3 раза больше первоначальной. Найдите концентрацию соли в исходном растворе, считая массу 1 л воды равной 1 кг.

Задачи на совместную работу

237 а) Один рабочий выполняет некоторую работу за 8 ч. Другой рабочий может выполнить ту же работу за 12 ч. Сколько часов будет затрачено, если эту работу делать совместно?

б) Одна машинистка может перепечатать рукопись за 4 ч, а другая — за 2,4 ч. За сколько часов они перепечатают рукопись при совместной работе?

238 а) Бассейн наполняется двумя трубами за 4 ч. Первая труба может наполнить бассейн за 5 ч. За сколько часов наполнит бассейн одна вторая труба?
б) Одна машинистка может выполнить некоторую работу за 5 ч. За сколько часов может выполнить эту работу другая машинистка, если, работая вместе, они выполнили ту же работу за 4 ч?
в) Через первый кран ванна наполнится водой за 10 мин. Если открыть два крана, то ванна наполнится за 2 мин. За сколько минут наполнится ванна, если открыть только второй кран?

239 (МИФИ). Пустой бак с помощью трех труб, работающих совместно, можно наполнить за 13 ч 20 мин. Ту же работу первая и третья трубы выполняют за 20 ч, а первая и вторая — за одни сутки. Найдите отношение производительностей первой и второй труб (производительности всех труб постоянны).

Разные задачи

240 Сумма цифр двузначного числа равна 16, цифра его десятков на 2 больше цифры единиц. Найдите это число.

241 Пассажир поезда, идущего со скоростью 80 км/ч, заметил, что встречный товарный поезд, скорость которого 70 км/ч, прошел мимо него за 15 с. Найдите длину товарного поезда.

242 Моторная лодка прошла расстояние между двумя пристанями по течению за 9 ч, а против течения за 10 ч. Определите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

243 а) Для вспашки поля за 8 дней требуется 6 тракторов. Сколько таких же тракторов потребуется, чтобы вспахать поле за 4 дня?
б) Для уборки урожая пшеницы требуется 10 комбайнов на 20 дней. Сколько таких же комбайнов потребуется, чтобы убрать урожай за 8 дней?

244 (МГУ, геол. ф-т). а) От причала A к причалу B отплыли катер и лодка, причем скорость катера в 5 раз больше скорости лодки. Известно, что они плыли с постоянными скоростями, но катер сделал несколько остановок. Сколько времени катер затратил на все остановки, если он доплыл до причала B за 2 ч, а лодка — за 4 ч?
б) Из пункта A в пункт B выехали автомобилист и велосипедист, причем скорость автомобиля в 4 раза больше скорости велосипедиста. Известно, что они ехали с постоянными скоростями, но автомобилист сделал несколько остановок. Сколько времени автомобилист затратил на все остановки, если он доехал до пункта B за 3 ч, а велосипедист — за 5 ч?

245 (МГУ, экон. ф-т). а) Интервалы движения городских автобусов по трем маршрутам, проходящим через общую остановку, составляют 15, 20 и 24 мин соответственно. Сколько раз с 7 ч 55 мин до 17 ч 5 мин того же дня на этой остановке одновременно встречаются автобусы всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 12 ч 35 мин?

б) Интервалы движения морских катеров по трем маршрутам, начинающимся на общей пристани, составляют 30, 36 и 45 мин соответственно. Сколько раз с 7 ч 40 мин до 17 ч 35 мин того же дня на этой пристани одновременно встречаются катера всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 11 ч 15 мин?

246 (РЭА). а) Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 6 и в остатке 2. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 5 и в остатке 2. Найдите это число.

б) Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6 и в остатке 1, а если из него вычесть 9, то разность будет двузначным числом, которое отличается от исходного только порядком следования цифр. Найдите это число.

в) Если двузначное число умножить на сумму его цифр, то получится 405. Если число, написанное теми же цифрами в обратном порядке, умножить на сумму его цифр, то получится 486. Найдите это число.

г) Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 6 и в остатке 5. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 8. Найдите это число.

247 (РЭА). а) Число 64 разбейте на два слагаемых так, чтобы сумма первого слагаемого и квадрата второго была наименьшей. В ответе запишите большее из слагаемых.

б) Число 180 разбейте на два слагаемых так, чтобы сумма квадрата первого слагаемого и утроенного квадрата второго была наименьшей. В ответе запишите большее из слагаемых.

в) Число 18 разбейте на два слагаемых так, чтобы сумма первого слагаемого и квадрата второго была наименьшей. В ответе запишите большее из слагаемых.

г) Число 19 разложите на два слагаемых так, чтобы их произведение, сложенное с первым из них, было наибольшим. В ответе запишите большее из слагаемых.

248 (МГУ, ИСАиА). а) Определите сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 5600 и 3024 делятся без остатка на n и $n + 5$ соответственно.

б) Определите сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 3920 и 4320 делятся без остатка на n и $n + 7$ соответственно.

в) Определите сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 4400 и 2376 делятся без остатка на n и $n + 5$ соответственно.

г) Определите сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 4312 и 4752 делятся без остатка на n и $n + 7$ соответственно.

249 (РЭА). а) Проехав половину пути за 2 ч, водитель увеличил скорость движения на 20 км/ч и поэтому другую половину пути он проехал на полчаса быстрее. Какой путь прошла машина?

б) Проехав половину пути со скоростью 56 км/ч, водитель снизил скорость, и поэтому на вторую половину пути он затратил на $\frac{1}{3}$ времени больше, чем на первую. С какой скоростью автомобиль проехал вторую половину пути?

в) Проехав $\frac{2}{3}$ пути за 3 ч, водитель увеличил скорость на 10 км/ч и преодолел остаток пути за 1 ч 15 мин. Какова первоначальная скорость автомобиля?

г) Автомобилист планировал преодолеть весь путь за 2 ч. Проехав $\frac{2}{3}$ пути, он уменьшил скорость на 10 км/ч, в результате чего на остаток пути затратил на 32 мин меньше, чем на начальную часть пути. С какой скоростью автомобилист проехал начальную часть пути?

250 а) Теплоход первую половину пути шел с постоянной скоростью 30 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 20 км/ч. Какова средняя скорость теплохода на всем пути?

б) Автомашина с грузом проехала расстояние AB со скоростью 60 км/ч, а обратно она ехала без груза со скоростью 90 км/ч. Какова средняя скорость автомашины на всем пути?

251 (МГУ, филол. ф-т). Расстояние в 160 км между пунктами A и B автомобиль проехал со средней скоростью 40 км/ч. Часть пути по ровной дороге он ехал со скоростью 80 км/ч, а другую часть по бездорожью — со скоростью 20 км/ч. Какое расстояние проехал автомобиль по ровной дороге?

252 (МГУ, филол. ф-т). В течение двух часов пароход двигался по реке в тумане. После того как туман рассеялся, пароход вдвое увеличил свою скорость и плыл еще 6 ч. Какой длины путь проделал пароход в тумане, если его средняя скорость за 8 ч плавания составила 14 км/ч?

253 (МГУ, геогр. ф-т). По реке из пункта A в пункт B вышел катер. Одновременно из пункта B в пункт A вышла моторная лодка. Пройдя четверть пути от B к A, лодка встретилась с катером. Катер, достигнув пункта B, повернул обратно и прибыл в пункт A одновременно с лодкой. Во сколько раз скорость катера больше скорости лодки?

254 (РЭА). Моторная лодка проплыла по озеру, а потом поднялась вверх по реке, впадающей в озеро. Путь по озеру на 30% больше, чем путь по реке, а скорость движения лодки против течения на 10% меньше, чем по озеру. На сколько процентов время движения по озеру больше времени движения по реке?

255 Токарь ежедневно перевыполняет норму на 20 деталей. Сколько деталей ежедневно обрабатывает токарь, если пятидневную норму он выполняет за три дня?

256 Отец сказал: «Если удвоенный теперешний возраст моего сына уменьшить на утроенный возраст, который он имел 6 лет назад, то получится его возраст в данное время». Сколько лет сыну?

257 Для экскурсии нужно собрать денег. Если каждый экскурсант внесет по 7,5 р., то на расходы не хватит 44 р. Если каждый внесет по 8 р., то останется 44 р. Сколько человек принимало участие в экскурсии?

258 (МГУЭСИ). На трех складах находится 420 м^3 дров. На первом складе 110 м^3, на втором складе на несколько кубометров больше, чем на первом, а на третьем — на столько же кубометров больше, чем на втором. Сколько кубометров дров на втором складе?

259 (МГУЭСИ). Ученики собрали 3,2 кг семян белой акации, желтой акации, клена и липы. Сколько килограммов семян желтой акации собрали ученики, если семян белой акации они собрали в 3 раза больше, чем семян липы, семян клена собрано в 2 раза больше, чем семян белой акации и липы вместе, а семян желтой акации на 1,2 кг больше, чем семян клена?

260 Из города A в город B выезжает велосипедист, а через 3 ч из города B навстречу ему выезжает мотоциклист, скорость которого в 3 раза больше скорости велосипедиста. Они встретились посередине между городами A и B. Сколько часов был в пути велосипедист?

261 Из пункта A в пункт B вышел товарный поезд. Через 1,5 ч вслед за ним вышел пассажирский поезд, скорость которого на 5 км/ч больше скорости товарного поезда. Через 15 ч после своего выхода пассажирский поезд обогнал товарный поезд на 21 км. Определите скорость товарного поезда.

262 (МГУЭСИ). Бассейн наполняется водой двумя трубами, работающими одновременно, за 6 ч. Одна первая труба заполняет его на 5 ч быстрее, чем одна вторая. За сколько часов можно наполнить бассейн через одну вторую трубу?

263 (МИФИ). Бассейн наполняется водой двумя трубами, работающими одновременно, за 12 ч. Если производительность первой трубы увеличить втрое, а производительность второй трубы уменьшить вдвое, то наполнение бассейна двумя одновременно работающими трубами произойдет за 8 ч. За сколько часов наполняет бассейн каждая труба, работая с первоначальной производительностью?

264 Двое рабочих вместе выполняют некоторую работу за 5 дней. Если бы первый рабочий работал вдвое медленнее, то всю работу они выполнили бы за 6 дней. Сколько дней необходимо для выполнения этой работы первому рабочему?

265 Числитель дроби составляет $\frac{2}{3}$ знаменателя. К числителю прибавили 5, а к знаменателю 18, дробь стала равной $\frac{1}{3}$. Найдите числитель дроби.

266 Два экскаватора вырыли котлован за 48 дней. Первый экскаватор один мог бы выполнить эту работу в 3 раза быстрее второго. За сколько дней первый экскаватор, работая отдельно, мог бы выполнить эту работу?

267 Двое рабочих, работая вместе, выполняют некоторую работу за 8 ч. Работая отдельно, первый из них может выполнить эту работу на 12 ч быстрее, чем второй. За сколько часов второй рабочий один может выполнить ту же работу?

268 (МГТУ). Расстояние между двумя станциями железной дороги 96 км. Первый поезд проходит это расстояние на 40 мин быстрее, чем второй. Скорость первого поезда больше скорости второго на 12 км/ч. Определите скорость первого поезда.

269 (МГТУ). Два велосипедиста выезжают одновременно из городов A и B навстречу друг другу. Первый проезжает в час на 2 км больше второго и приезжает в B на 1 ч раньше, чем второй в A. Расстояние между A и B равно 24 км. Определите скорость первого велосипедиста.

270 Из пункта A в пункт B выехал автобус. Чтобы прибыть в B по расписанию, он должен был ехать с постоянной скоростью 60 км/ч. Проехав половину пути со скоростью 60 км/ч, автобус сделал остановку на 30 мин для замены колеса, поэтому, чтобы прибыть в пункт B по расписанию, оставшуюся часть пути он ехал со скоростью 90 км/ч. Определите расстояние между пунктами A и B.

271 По норме токарь должен был выполнить заказ за 29 дней. Проработав 5 дней по норме, он начал работать на новом станке и досрочно закончил выполнение заказа. За сколько дней он выполнил заказ, если его производительность труда на новом станке в 4 раза выше?

272 Два автобуса отправились одновременно из пункта A в пункт B. Расстояние между пунктами 36 км. Первый автобус прибыл в пункт B на 15 мин раньше второго, скорость которого была на 12 км/ч меньше скорости первого автобуса. Определите скорость второго автобуса.

273 Возраст некоего господина в 1967 г. равнялся сумме цифр года его рождения. Сколько лет было господину в 1967 г.?

274 (МГУ, хим. ф-т). Определите число студентов, сдавших экзамен, если известно, что шестая часть из них получили оценку «удовлетворительно», 56% получили оценку «хорошо», а 14 человек получили оценку «отлично», причем эти отличники составляют более 4%, но менее 5% от искомого числа студентов.

275 (МГУ, хим. ф-т). Определите число студентов, сдавших экзамен, если известно, что третья часть из них получили оценку «удовлетворительно», 44% получили оценку «хорошо», а пять человек получили оценку «отлично», причем эти отличники составляют более 3%, но менее 4% от искомого числа студентов.

276 (МГУ, экон. ф-т). За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем $11\frac{1}{9}\%$, потом $7\frac{1}{7}\%$ и, наконец, 12% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определите срок хранения вклада.

277 (МГУ, экон. ф-т). Техническая реконструкция предприятия была проведена в четыре этапа. Каждый из этапов продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства составило на первом этапе 4%, на втором — $6\frac{2}{3}\%$, на третьем — $6\frac{1}{4}\%$ и на четвертом — $12\frac{2}{7}\%$ в месяц. По окончании реконструкции первоначальный объем производства на предприятии сократился на 37%. Определите продолжительность периода реконструкции.

278 (ВШЭ). Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в вуз, оценку «отлично» получили: по математике — 48 абитуриентов, по физике — 37, по русскому языку — 42, по математике или физике — 75, по математике или русскому языку — 76, по физике или русскому языку — 66, по всем трем предметам — 4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько среди них получивших только одну пятерку?

279 За неделю до получения стипендии у четырех студентов осталось 45 р. Если бы деньги первого студента увеличить на 2 р., деньги второго уменьшить на 2 р., деньги третьего увеличить вдвое, а деньги четвертого уменьшить вдвое, то у всех четверых денег было бы поровну. Сколько денег было у каждого студента?

280 **Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.** Один воин вышел из цареграда и шел всякий день по 12 миль, а второй пошел вслед его в тот же час и шел таким образом. В первый день прошел 1 милю, во второй день 2 мили, в третий день 3 мили, в четвертый день 4 мили, в пятый 5 миль и так прибавлял каждый день 1 милю. Спрашивается, через сколько дней второй догонит первого.

281 (МГУ, мехмат). Мастер делает за 1 ч целое число деталей, большее 5, а ученик — на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе — на 1 ч быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ?

282 (МГУ, мехмат). Один рабочий на новом станке производит за 1 ч целое число деталей, большее 8, а на старом станке — на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют норму на старых станках на 1 ч быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма?

283 **Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.** Три человека хотят двор купить. Первый говорит второму: дашь мне $\frac{3}{4}$ денег, что имеешь, и я один заплачу цену за двор. Второй говорит третьему: дашь мне $\frac{2}{5}$ из твоих денег, и я один заплачу цену за двор. Третий говорит первому: дашь мне $\frac{1}{3}$ из твоих денег, и я один заплачу цену за двор. А двору цена 100 р. Сколько каждый имел денег?

284 **Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.** Три человека разговаривали между собой. Первый из них говорит второму: если бы мне взять от твоих денег $\frac{2}{4}$, а от третьего $\frac{3}{5}$, тогда было бы

у меня 150 р. Второй говорит третьему: если бы я взял твоих денег $\frac{3}{5}$, а от первого $\frac{5}{7}$, то я тоже имел бы 150 р. Третий говорит первому: если бы я взял от твоих денег $\frac{5}{7}$, а от второго $\frac{2}{4}$, то тоже имел бы 150 р. Спрашивается, сколько который в то время имел денег.

285 Грузовая машина выехала из A в B. Спустя 2 ч из B в A выехала легковая машина, которая прибыла в A на час позже, чем грузовая машина в B. Сколько часов была в пути грузовая машина, если к моменту встречи она уже проехала $\frac{2}{3}$ всего пути?

286 Первый пешеход может пройти расстояние между двумя пунктами на 5 ч быстрее, чем второй. Если пешеходы выйдут из этих пунктов одновременно навстречу друг другу, то встретятся через 6 ч. За сколько часов каждый из них может пройти это расстояние?

287 (МИФИ). Из пункта M в пункт N выходит первый пешеход, а через 2 ч навстречу ему из пункта N в пункт M выходит второй пешеход. К моменту встречи второй пешеход прошел $\frac{7}{9}$ от расстояния, пройденного к этому моменту первым пешеходом. Сколько часов требуется первому пешеходу на весь путь от M до N, если второй пешеход проходит путь от N до M за 7 ч?

288 Из города A в город B выехал автомобиль. Спустя некоторое время из B в A по той же дороге выехал мотоцикл. Скорости автомобиля и мотоцикла на всем пути постоянны. Автомобиль до встречи с мотоциклом был в пути 7 ч 30 мин, а мотоцикл до встречи ехал 3 ч. Мотоцикл прибыл в A в 23 ч, а автомобиль прибыл в B в 16 ч 30 мин. Найдите время отправления мотоцикла из города B.

289 (МИФИ). Из города D в город E с интервалом в 10 мин отправились три рейсовых автобуса. Первый автобус шел со скоростью на 5 км/ч меньше положенной, второй автобус сохранял положенную скорость, а третий автобус превышал ее на 6 км/ч. В результате все три автобуса пришли в город E одновременно. Определите расстояние между городами D и E.

290 (УГАТУ). Войсковая колонна имеет длину 5 км. Связной, выехав из арьергарда колонны, передал пакет в начало колонны и вернулся обратно. Колонна за это время прошла путь в 12 км. Какой путь прошел связной?

291 (МИФИ). При покупке 14 аудиокассет, часть из которых с записью, заплатили c условных денежных единиц. Чистая аудиокассета стоит 15 условных денежных единиц, а кассета с записью — 20 условных денежных единиц. Сколько аудиокассет с записью было куплено?

292 (НГУ, мехмат, экон. ф-т). Купил Роман раков, вчера — мелких, по цене 51 к. за штуку, а сегодня — по 99 к., но очень крупных. Всего на раков он истратил 25 р. 20 к., из них переплаты из-за отсутствия сдачи в сумме составили от 16 до 20 к. Определите, сколько раков купил Роман вчера и сколько сегодня.

293 (МИФИ). Иван Петрович приобрел в начале года k акций банка «Надежда», часть из которых простые, а другая часть — привилегированные. За год доход составил 16 условных денежных единиц по одной простой акции и 21 условную денежную единицу по одной привилегированной акции. Сколько привилегированных акций приобрел Иван Петрович, если за год доход по всем акциям составил 269 условных денежных единиц?

294 Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из двух сел и встретились через несколько минут. После встречи первый пришел в другое село через a мин, а второй — через b мин. За сколько минут каждый из пешеходов прошел свой путь? Решите задачу в общем виде. Получите ответ для случая, когда: а) $a = 16$, $b = 25$; б) $a = 18$, $b = 32$.

295 (МИФИ). Расстояние между двумя пунктами A и B равно L км. Одновременно из пункта A по направлению к B вышли два пешехода, а из пункта B им навстречу — третий. Первый и третий пешеходы встретились через 3 ч после начала движения. В тот момент, когда первый пешеход оказался в пункте B, второй пешеход находился в 10 км от этого пункта. Определите скорость второго пешехода, если известно, что скорости пешеходов постоянны, причем скорость второго пешехода больше скорости третьего на 2 км/ч, но меньше скорости первого.

296 **Из сборника задач П. А. Ларичева.** Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за t часов, причем один первый, работая отдельно, может выполнить ее на 4 ч скорее второго. За сколько времени может выполнить эту работу каждый из них, работая отдельно?

297 Теплоход длины l м движется по реке с постоянной скоростью. Катер, имеющий скорость v м/с, проходит расстояние от кормы движущегося теплохода до его носа и обратно за t с. Найдите скорость теплохода.

298 Торговец продает купленный товар в розницу с наценкой $p\%$. С какой наибольшей скидкой в целое число процентов ($q\%$) от розничной цены он может продать остатки этого товара, чтобы на этой продаже не иметь убытка? Решите задачу в общем виде. Получите ответ для случая, когда: а) $p = 30$; б) $p = 25$.

299 Торговец продает купленный товар в розницу с наценкой $p\%$. С какой наибольшей скидкой в целое число процентов ($q\%$) от розничной цены он может продавать товар, чтобы иметь доход не менее $d\%$? Решите задачу в общем виде. Получите ответ для случая, когда: а) $p = 30$, $d = 10$; б) $p = 25$, $d = 10$.

300 Яблоки содержали $a\%$ воды. На какое наименьшее число процентов ($b\%$) надо уменьшить массу яблок при сушке, чтобы сушеные яблоки содержали не более $c\%$ воды? Решите задачу в общем виде. Получите ответ для случая, когда: а) $a = 80$, $c = 50$; б) $a = 75$, $c = 40$.

301 Когда товарный поезд проходил мимо станции A, пассажирский поезд только начал равноускоренное движение (начальная скорость равна нулю). Поезда поравнялись в тот момент, когда они прошли треть пути от станции A до следующей станции B. В этот момент пассажирский поезд, набравший некоторую скорость, начал движение с постоянной скоростью. Во сколько раз больше времени затратил на путь от A до B товарный поезд, чем пассажирский, если скорость товарного поезда на всем пути была постоянной?

302 Из пункта A в пункт B отправились одновременно два поезда. Каждый из них вначале двигался равноускоренно (ускорения поездов различны, начальные скорости равны нулю), а затем, набрав некоторую скорость, — равномерно. Отношение скоростей равномерного движения поездов равно 2. Пройдя четверть пути от A до B, поезда поравнялись, причем в этот момент скорость одного была в 1,5 раза больше скорости другого. Найдите отношение промежутков времени, за которые поезда прошли путь от A до B.

303[1] (А1). Найдите значение выражения $4^{6p} \cdot 4^{-4p}$ при $p = \frac{1}{4}$.
1) 1; 2) 2; 3) 32; 4) 4.

304 (А2). Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt{16}}{\sqrt[3]{250}}$.

1) 1,2; 2) $\dfrac{6 \cdot \sqrt[3]{2}}{5}$; 3) 2,4; 4) $\sqrt[3]{2}$.

305 (А3). Найдите значение выражения $\log_4(64c)$, если $\log_4 c = -3{,}5$.
1) –6,5; 2) –0,5; 3) –10,5; 4) –67,5.

---

[1] Задачи 303—315 взяты из демонстрационной версии ЕГЭ—2007.

306 (A6). Укажите множество значений функции $y = 2^x + 5$.
1) $(5; +\infty)$; 2) $(0; +\infty)$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $(7; +\infty)$.

307 (A8). Найдите область определения функции $y = \dfrac{25}{3 - \sqrt[4]{x}}$.
1) $[0; 3) \cup (3; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$;
3) $[0; 81) \cup (81; +\infty)$; 4) $(-\infty; 81) \cup (81; +\infty)$.

308 (A10). Решите уравнение $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}x\right) - 1 = 0$.
1) $\pm\dfrac{4}{3} + 8n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\dfrac{4}{3} + 8n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;
3) $\pm\dfrac{2}{3} + 4n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\dfrac{2}{3} + 4n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

309 (B2). Найдите значение выражения
$$5\sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right), \text{ если } \sin\alpha = 0{,}5.$$

310 (B4). Найдите значение выражения $2^x - y$, если $(x; y)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2 \\ 2^{x+1} - 3y = 43. \end{cases}$

311 (B6). Найдите значение выражения
$$\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} \text{ при } x = 1{,}2007.$$

312 (B7). Найдите наименьший корень уравнения
$$\log_3(x+1)^2 + \log_3|x+1| = 6.$$

313 (B8). Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Ее период равен 2 и $f(1) = 5$. Найдите значение выражения $3f(7) - 4f(-3)$.

314 (B9). Денежный вклад в банк за год увеличивается на 11%. Вкладчик внес в банк 7000 р. В конце первого года он решил увеличить сумму вклада и продлить срок действия договора еще на год, чтобы в конце второго года иметь на счету не менее 10 000 р. Какую наименьшую сумму необходимо дополнительно положить на счет по окончании первого года, чтобы при той же процентной ставке (11%) реализовать этот план? (Ответ округлите до целых.)

315 (C3). Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству
$$(2a - 1)x^2 < (a + 1)x + 3a$$
при любом значении параметра a, принадлежащем промежутку $(1; 2)$.

Список принятых сокращений

ВАХЗ — Военная академия химической защиты
ВШЭ — Высшая школа экономики
ГАНГ — Государственная академия нефти и газа им. И. М. Губкина
ГАСБУ — Государственная академия сферы быта и услуг
ГУЗ — Государственный университет по землеустройству
МВВДИУ — Московское высшее военное дорожное инженерное училище
МВОКУ — Московское высшее общевойсковое командное училище
МГАВТ — Московская государственная академия водного транспорта
МГАДИ — Московский государственный автомобильно-дорожный институт (технический университет)
МГАТХТ — Московская государственная академия тонкой химической технологии
МГАХМ — Московская государственная академия химического машиностроения
МГАУ — Московский государственный агроинженерный университет им. В. П. Горячкина
МГЗИПП — Московский государственный заочный институт пищевой промышленности
МГИЭТ — Московский государственный институт электронной техники (технический университет)
МГОПУ — Московский государственный открытый педагогический университет
МГОУ — Московский государственный открытый университет
МГСУ — Московский государственный социальный университет
МГТА — Московская государственная текстильная академия им. Н. А. Косыгина
МГТУ — Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
МГТУ СТАНКИН — Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»
МГУ — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова:
биол. ф-т — биологический факультет
ВМиК — факультет вычислительной математики и кибернетики
геогр. ф-т — географический факультет
геол. ф-т — геологический факультет
ИСАиА — Институт стран Азии и Африки
мехмат — механико-математический факультет
почв. ф-т — факультет почвоведения
псих. ф-т — факультет психологии
социол. ф-т — социологический факультет
физ. ф-т — физический факультет
филол. ф-т — филологический факультет
хим. ф-т — химический факультет
экон. ф-т — экономический факультет

МГУГК — Московский государственный университет геодезии и картографии
МГУК — Московский государственный университет коммерции
МГУЛ — Московский государственный университет леса
МГУЭСИ — Московский государственный университет экономики, статистики и информатики
МИФИ — Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет) МИФИ
МТИТФ — Московский технологический институт, Тольяттинский филиал
МТУСИ — Московский технический университет связи и информатики
МФТИ — Московский физико-технический институт
НГУ — Новосибирский государственный университет
ОГАПС — Омская государственная академия путей сообщения
РГАЗУ — Российский государственный аграрный заочный университет
РГОТУПС — Российский государственный открытый технический университет путей сообщения
РУДН — Российский университет дружбы народов
РЭА — Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова
СГУ — Самарский государственный университет
СПГИЭА — Санкт-Петербургская государственная инженерно-экономическая академия
УГАТУ — Уральский государственный авиационный технический университет

Предметный указатель

Ответы

§ 1

1.5. а) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{7}{9}$; б) $\frac{13}{99}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{5}{11}$; $\frac{6}{11}$; в) $\frac{128}{999}$; $\frac{41}{333}$; $\frac{35}{37}$; $\frac{46}{333}$; г) $\frac{1}{30}$; $\frac{4}{55}$; $\frac{13}{9900}$; $\frac{61}{1110}$; д) $\frac{26}{9}$; $\frac{311}{99}$; $\frac{235}{33}$; $\frac{168}{55}$. **1.7.** к) $-0,45 > -0,(45)$; л) $-0,45 > -\frac{5}{11}$; м) $-\frac{5}{11} > -0,(46)$. **1.8.** а) 3,141; 3,(14); π; $3\frac{1}{7}$; б) $-5,9$; $-5\frac{8}{9}$; $-5,(7)$; $-5,6789101112\ldots$; $-5\frac{2}{3}$. **1.16.** а) -10; 10; в) $-1,5$; 1,5; д) -7; 17. **1.17.** а) -12; 12; б) -16; -2; 2; 16. **1.26.** а) $[-3;\ 3]$; б) $(-\infty;\ -4] \cup [4;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ 1] \cup [5;\ +\infty)$. **1.27.** а) $|x| < 2$; б) $|x| \geqslant 3$; г) $|x-1| \leqslant 3$; д) $|x+1| > 2$. **1.46.** а) 120; б) 720; в) 42; г) 2000; д) 3003; е) $\frac{3}{182}$; ж) $\frac{1}{6}$; з) $\frac{1}{16}$. **1.48.** а) $\frac{6}{(n+3)!}$; б) $\frac{n^2}{(n+1)!}$; в) $\frac{k^2}{(k+1)!}$; г) $\frac{-2k}{(k+1)!}$. **1.53.** а) 10; б) 132. **1.54.** 720; а) 120; б) 480; в) 24; г) 96; д) 240; е) 360. **1.55.** 72. **1.56.** Все 5040 способов посадки потребуют 5040 недель, т. е. более 96 лет (сделайте вывод). **1.58.** а) 24; б) 20; в) 60; г) 840; д) 2520; е) 8. **1.59.** а) 5,5; б) 100; в) $\frac{22}{7}$; г) $\frac{1}{4}$; д) 3; е) $\frac{13}{96}$. **1.60.** а) 30. **1.61.** а) 9; б) 12; в) 9; г) 3; д) 5; е) 4. **1.63.** а) 4; б) 5; в) 10; г) 35; д) 21; е) 28. **1.65.** 10 способами. **1.66.** 20 способами. **1.67.** а) 435 способами; б) 435 способами. **1.68.** а) 204; б) 139; в) 1245; г) 2; д) 0; е) $\frac{7}{26}$. **1.69.** $\frac{97}{338}$. **1.72.** 9. **1.73.** а) 15 способами; б) 50 способами. **1.74.** 2^n. **1.84.** а) $m = 5$, $n = 1$, $k = 6$, $p = 2$; б) $m = 1$, $n = 2$, $k = 3$, $p = 4$. **1.100.** 9. **1.106.** а) $(7;\ -6)$; $(1;\ 6)$; $(-7;\ 6)$; $(-1;\ -6)$; г) $(3;\ 0)$; $(1;\ -2)$. **1.107.** а) $(1;\ -2)$.

§ 2

2.4. а) $x-1$; б) $x-2$; в) x^2-3x+9; г) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. **2.5.** а) $\frac{x-5}{x^2-25}$; б) $\frac{x^2+5x}{x^2-25}$; в) $\frac{-3x-15}{x^2-25}$; г) $\frac{2x^2-50}{x^2-25}$. **2.7.** а) $\frac{a}{a^3-b^3}$; б) $\frac{m^2+mn+n^2}{2(m^3+n^3)}$; в) $\frac{2y}{(x-2y)^2}$; г) $\frac{2pq}{(p^3-q^3)(p+q)}$. **2.8.** а) 3; б) 4; в) 2; г) 1. **2.9.** а) $\frac{2b}{a^2-b^2}$; б) $\frac{x-y}{2y}$. **2.10.** а) 4,2; б) $\frac{5}{42}$. **2.12.** а) $(7;\ 6)$. **2.16.** а) $2l+1$; б) $2l+2$. **2.17.** а) $a^5 + C_5^1 a^4 x + C_5^2 a^3 x^2 + C_5^3 a^2 x^3 + C_5^4 a x^4 + x^5$. **2.18.** а) C_6^3; б) C_{10}^3; в) C_{12}^3. **2.19.** а) C_8^4; б) C_{10}^5; в) C_{16}^8. **2.20.** а) $C_8^3 a^5$; б) $1728 C_9^3 a^6$; в) $-3^8 \cdot 5^3 \cdot C_{11}^3 a^8 x^3$.

2.21. а) $27C_6^3a^3$; б) $12^4C_8^4a^4x^4$; в) $10^7C_{14}^7x^7$. **2.22.** а) $6a^2b$; б) $6ab^2$; в) $3ab(a+b)$; г) $3ab(b-a)$. **2.25.** а) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{(a+b)(a^2+b^2)}$; б) $a+b$; в) $\dfrac{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4}{a^2+ab+b^2}$; г) $\dfrac{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4}{a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6}$; д) $\dfrac{1}{a-b}$; е) $a+b$; ж) $\dfrac{a^2+2a+4}{(a+2)(a^2+4)}$; з) $a+3$; и) $\dfrac{a^4+2a^3+4a^2+8a+16}{a^2+2a+4}$; л) $\dfrac{1}{a-2}$; м) $a+1$. **2.26.** а) Да; б) да. **2.29.** а) 1; б) $x-1$; в) x; г) x^2-4x+3. **2.30.** а) $x+1$; б) $x-1$; в) $\dfrac{x-1}{x+1}$; г) $\dfrac{x+2}{x-2}$. **2.32.** а) x^8+x^4+1; б) $x^{10}-x^8+x^6-x^4+x^2-1$; в) $x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1$; г) $x^{11}-x^{10}+x^9-x^8+x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$; д) $x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$; е) $x^4+2x^3+4x^2+8x+16$; ж) $x^5+2x^4+4x^3+8x^2+16x+32$; з) $x^6+2x^5+4x^4+8x^3+16x^2+32x+64$. **2.35.** а) -8; 3; 46; б) 5; 9; 41; в) 0; 0; -15. **2.37.** а) 1; 1; б) -1; 1; в) 1. **2.38.** а) Да; б) да; в) нет; г) да. **2.42.** а) 1, -1, 2, -2, 4, -4; корни $P_4(x)$: 1, -1, 2, -2; $P_4(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$. **2.43.** а) -2; 3; 4; б) -1; $\dfrac{1}{2}$; 1; в) -2; 2; 4. **2.46.** а) 2; 3; 5; б) -5; -2; 3; в) -1; 1; г) -1; 1. **2.47.** а) 0; 5; б) -4; в) 1; 6; г) нет корней. **2.48.** а) -4; 4; б) 15; в) 4; г) -4. **2.49.** а) -101, 1905; б) -1, 2, $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; в) -1, 1, 3; г) 1, 9, $5-\sqrt{26}$, $5+\sqrt{26}$; д) -2, 3; е) -2, 2; ж) 2, 3; з) -1, 2. **2.50.** а) -1; б) 1; в) $-\sqrt{2}$; $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2}$; г) -1, 1. **2.51.** а) -2; 2; б) -5; 5; в) -6; 6; г) -4; 4. **2.52.** а) Нет корней, если $a=0$; $x_1=-2a$, $x_2=2a$, если $a\ne0$; б) нет корней, если $(a-b)a=0$; $x_1=1$, если $a(a-b)\ne0$; $x_2=\dfrac{a+b}{a-b}$, если $a(a-b)(a+b)\ne0$; в) нет корней, если $b=0$; $x_1=\dfrac{b}{3}$, $x_2=-\dfrac{b}{3}$, если $b\ne0$; г) нет корней, если $a=0$; $x_1=0$, $x_2=\dfrac{3a}{2}$, если $a\ne0$. **2.53.** а) -3; -2; -1; б) -3; -1; 2; в) 2; г) 3; д) нет корней; е) 0. **2.54.** а) -1; 1; $\dfrac{1}{2}$; б) -2; $\dfrac{1}{3}$; 2; в) нет корней; г) $-\sqrt{3}$; 1; $\sqrt{3}$; 3; д) нет корней; е) $-\sqrt{2}$; 1; $\sqrt{2}$; 2. **2.55.** а) 1; 3; б) 1; в) -2; 3; г) $-\dfrac{1}{3}$. **2.56.** а) $(1; -2)$; б) $(1; -1)$, $\left(-\dfrac{5}{3}; -\dfrac{7}{3}\right)$; в) $(5; -2)$, $(-2; 5)$; г) $(4; -3)$, $(-3; 4)$; д) $(0; 2)$, $(2; 0)$; е) $(0; 4)$, $(4; 0)$. **2.57.** а) $(1; 2)$, $\left(\dfrac{11}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$, $(-1; -2)$, $\left(-\dfrac{11}{4}; -\dfrac{1}{4}\right)$; б) $(2; -1)$, $\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$, $(-2; 1)$, $\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$; в) $(1; 4)$; г) $(-2; -3)$. **2.59.** а) $(1; 1)$, $\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{3}{2}\right)$; б) $\left(-\dfrac{1}{2}; -4\right)$; $\left(-\dfrac{13}{2}; -4\right)$, $(2; 1)$, $(2; 13)$; в) $\left(-\dfrac{5}{3}; -\dfrac{5}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{5}{6}; -\dfrac{5}{12}\right)$, $\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$; г) $\left(-\dfrac{5}{2}; -\dfrac{5}{2}\right)$,

$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{15}{2}; \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; д) (2; 3), (3; 2); е) (5; 2), (–2; –5); ж) (–1; 0), (0; –1); з) (2; 0), (0; 2). **2.65.** а) $(1; 3) \cup (5; +\infty)$; б) $(-\infty; 1) \cup (3; 5)$. **2.66.** а) $(1; 4) \cup (9; +\infty)$; б) $(-\infty; -1) \cup (3; 5)$; в) $(-1; 1) \cup (4; +\infty)$; г) $(-\infty; -4) \cup (-2; 0)$; д) $(-5; -3) \cup (-1; +\infty)$; е) $(-\infty; -4) \cup (-3; 0)$. **2.67.** а) $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -4) \cup (0; 2)$; в) $(-\infty; -4) \cup (-2; 0)$; г) $(-1; 0) \cup (8; +\infty)$; д) $(-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$; е) $(-5; -3) \cup (3; 5)$. **2.68.** а) $(-\infty; -2) \cup (-1; 3)$; б) $(-3; -2) \cup (2; +\infty)$. **2.69.** а) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$; б) $(1; 2) \cup (2; 3)$. **2.70.** а) $(-\infty; -3) \cup (-3; -1) \cup (2; +\infty)$; б) $(-4; -2)$; в) $(-2; 3)$; г) $(-5; -2) \cup (-2; 5) \cup (5; +\infty)$. **2.71.** а) $(-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup (4; +\infty)$; б) $(-1; 3) \cup (3; 5)$. **2.72.** а) $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$; б) $(-1; 1) \cup (1; 4)$; д) $(3; +\infty)$; е) $(-\infty; -2)$; ж) $(-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$; з) $(-2; 3)$; и) $(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$; к) $(-3; 4)$. **2.74.** а) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; б) $(1; 2)$. **2.75.** а) $(3; 4) \cup (5; +\infty)$; б) $(-\infty; -5) \cup (-4; -3)$. **2.76.** а) $(-\infty; -2) \cup (1; 2)$; б) $(-3; -2) \cup (3; +\infty)$; д) $\left(0; \frac{3}{4}\right) \cup (1; 3)$; е) $(-\infty; 0) \cup (2; 3) \cup (9; +\infty)$. **2.77.** а) $(-3; -2)$; б) $(-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (3; +\infty)$. **2.78.** ж) Нет решений; з) $(-2; -1)$; и) $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$; к) $(-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$. **2.79.** а) $(2; 4)$; б) $(-3; 1)$; в) $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$; г) $(-\infty; 1) \cup (4 +\infty)$. **2.81.** а) Да; б) нет; в) да; г) да; д) да; е) нет. **2.82.** а) $(-\infty; 1{,}5]$; б) $[0{,}75; +\infty)$. **2.83.** а) $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$; б) $[-3; 2]$. **2.84.** а) $[4; 8]$; б) $[-4-2\sqrt{7}; -4+2\sqrt{7}]$; в) $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{57}}{4}; +\infty\right)$; г) $\left[\frac{5-\sqrt{37}}{6}; \frac{5+\sqrt{37}}{6}\right]$. **2.85.** а) 1; б) $(-\infty; +\infty)$; в) -3; г) $(-\infty; +\infty)$. **2.86.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $[-5; -2]$; в) нет решений; г) $(-\infty; +\infty)$. **2.87.** г) $[-5; -2] \cup [2; +\infty)$; д) $(-\infty; 1]$; е) $[2; +\infty)$. **2.88.** б) $(-\infty; 2{,}4]$; в) $(-\infty; -2] \cup [2; 7]$; г) $(-\infty; 2] \cup \{3\}$. **2.89.** а) $(-\infty; 1] \cup \{2\}$; б) $\{-2\} \cup [-1; +\infty)$; в) $\{-1\} \cup [1; +\infty)$; г) $(-\infty; 2] \cup \{3\}$; д) $(-\infty; -1] \cup \{1\} \cup [3; +\infty)$; е) $[-2; 1] \cup \{2\}$. **2.90.** а) $(1; +\infty)$; б) $(2; +\infty)$; в) $(-\infty; -1{,}5) \cup [8; +\infty)$; г) $(-\infty; -5) \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$. **2.91.** а) $(-\infty; -3) \cup [1; 3) \cup (3; +\infty)$; б) $(-\infty; -5) \cup [2; 5) \cup (5; +\infty)$; в) $(-\infty; 3)$; г) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. **2.92.** а) $[-2; 1] \cup (3; +\infty)$; б) $(-5; 3] \cup (4; +\infty)$; в) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup (1; +\infty)$; г) $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (2; +\infty)$; д) $(-1; 2] \cup [3; +\infty)$; е) $(-\infty; -6) \cup [5; 8)$. **2.95.** а) $(-1; 1)$; б) нет решений; в) $[-6; -2) \cup (-1; 3]$; г) $[-3; 3)$. **2.96.** в) Нет решений; г) $(-\infty; -3]$. **2.97.** а) $(1; 5)$; б) нет решений; в) $(-\infty; -2) \cup (2; 5)$; г) $(-2; 1] \cup (2; 4)$. **2.98.** а) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; б) $(-4; 4)$; в) $[-3; -2) \cup [3; +\infty)$; г) $[-10; -7)$. **2.99.** в) $[2; 3)$; г) $[-4; -1) \cup (-1; 1)$. **2.100.** а) Нет решений; б) $(-\infty; -9) \cup [-4{,}95; 2)$; в) $[-4; 4]$; г) $(-7; -5) \cup [-2; 5)$. **2.101.** а) 1; 3; б) –5; 9; в) 2; 6; г) 6. **2.102.** а) При $a = 3$, $a = 5$; б) при $3 < a < 5$; в) при $a < 3$ или $a > 5$. **2.104.** а) $\{1\} \cup [3; 4]$; в) $\{6\}$; д) $\left\{-\frac{2}{3}\right\} \cup [0; +\infty)$. **2.106.** а) 1; б) 3. **2.107.** а) 3; б) –3.

§ 3

3.2. г) $(-\infty; +\infty)$; д) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **3.3.** в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; д) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; е) $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$. **3.10.** а) $(0; 0)$; $(1; 1)$; б) $(0; 0)$; $(1; 1)$; $(-1; 1)$; в) $(0; 0)$; $(1; 1)$; $(-1; -1)$. **3.11.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$; в) $[0; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$. **3.14.** в) $(-\infty; +\infty)$; г) $[0; +\infty)$. **3.15.** а) $(-\infty; 0]$. **3.17.** а) $x > x^2$; б) $x^2 > x^3$. **3.18.** а) $x < x^2$; б) $x^2 < x^3$. **3.19.** а) $x < x^3 < x^5$; б) $x^2 > x^4 > x^6$. **3.20.** а) $x > x^3 > x^5$; б) $x^2 < x^4 < x^6$. **3.21.** а) $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$; в) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; г) $(-1; 0) \cup (0; 1)$. **3.25.** а) 1, 2, 3, … …, 20, 21; б) −17, −16, −15, …, 15, 16, 17. **3.26.** 10. **3.30.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **3.31.** а) 10; б) 40; в) 5000; г) −0,1; д) $\frac{3}{2}$; е) $-\frac{5}{4}$. **3.32.** а) 0; б) 20 и −20; в) 500 и −500; г) 0,1 и −0,1; д) $1 \cdot 10^{-3}$ и $-1 \cdot 10^{-3}$; е) $2 \cdot 10^{-1}$ и $-2 \cdot 10^{-1}$. **3.43.** а) Да; б) да; в) нет; г) нет. **3.45.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **3.46.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **3.53.** а) Нет; б) нет; в) да; г) нет. **3.54.** а) 4; б) 10; в) 2; г) 3. **3.55.** а) −10; б) 40; в) 0,7; г) $\frac{2}{15}$. **3.56.** а) 6; б) 15; в) 10; г) 6; д) 2; е) 2; ж) 5; з) 6; и) 10. **3.57.** а) 12; б) 5; в) 0,9; г) 10. **3.58.** а) 2; б) 4; в) −4; г) −7. **3.59.** а) 6; б) 1. **3.60.** а) $2\sqrt[3]{5}$; б) $-2\sqrt[5]{2}$; в) $-2\sqrt[5]{3}$; г) $3\sqrt[3]{2}$; д) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}$; е) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$; ж) $-\frac{5}{2}$; з) $-\frac{4}{\sqrt[3]{7}}$. **3.61.** а) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$; б) $\frac{1}{2}\sqrt[5]{16}$; в) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$; г) $-\frac{5}{3}\sqrt[5]{27}$. **3.62.** а) 2; б) 25; в) $\sqrt{2} - 1$; г) $2 - \sqrt{2}$; д) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; е) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$. **3.63.** а) $2\sqrt[3]{4}$; б) $2\sqrt[5]{25}$; в) $16\frac{1}{6}\sqrt[3]{18}$; г) $2\sqrt[4]{5}$; д) $3\sqrt[4]{5}$; е) $\sqrt[3]{4}$; ж) −0,1. **3.64.** а) $k \leqslant 1$; б) $k \leqslant -1$. **3.65.** а) $x + 1$; б) $-x - 1$. **3.67.** а) 3; б) 4; в) 25; г) 27; д) 343; е) 9; ж) 8; з) 16. **3.68.** ж) 7; з) 5. **3.69.** д) 3; е) 20; ж) 0,3. **3.70.** а) $|x|$; б) $|x|$; в) $1 - x$; г) $x - 1$. **3.71.** а) $2\sqrt[3]{10}$; б) $3\sqrt[3]{3}$; в) $5\sqrt[3]{2}$; г) $-6\sqrt[3]{3}$; д) $a\sqrt[5]{a^2b}$; е) $2cd\sqrt[4]{cd^2}$; ж) $-x\sqrt[4]{5}$; з) $x\sqrt[5]{3y}$. **3.72.** а) 2; б) $3\sqrt[3]{2}$; в) $10\sqrt[3]{ab}$; г) $2a$; д) $2c$; е) $3x\sqrt[3]{3}$; ж) $\sqrt[11]{abc}$; з) $a\sqrt[3]{x}$; и) a^3. **3.73.** ж) $\sqrt[3]{\frac{axy^2}{b}}$; з) $\sqrt[4]{\frac{ax}{b^2}}$. **3.76.** а) $\sqrt{|a|}$; б) $\sqrt{a}$; в) $\sqrt{|ab|}$; г) $\sqrt[3]{a^2|b|}$. **3.79.** д) $\sqrt[6]{2}$; е) $4\sqrt[3]{4}$. **3.89.** а) $(0; 0)$; $(1; 1)$; б) $(0; 0)$; $(1; 1)$; $(-1; -1)$. **3.91.** а) $[0; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$. **3.95.** а) $[1; 3]$; в) $(-1; 0] \cup (3; 5]$; д) $(-5; -2] \cup \{-1\} \cup [1; 2)$. **3.99.** Нет. **3.100.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **3.103.** а) Да; б) да; в) нет; г) нет. **3.105.** а) $1 < \sqrt[3]{3} < 2$; б) $1 < \sqrt[3]{4} < 2$; в) $2 < \sqrt[4]{20} < 3$; г) $4 < \sqrt[4]{300} < 5$. **3.106.** а) $5{,}5 < \sqrt[3]{175} < 5{,}6$; $\sqrt[3]{175} \approx 6$. **3.108.** а) 5; б) 4,6. **3.109.** а) 1,4; б) 1,8; в) 2,0; г) 2,1. **3.110.** а) 1,442; б) 1,710.

§ 4

4.7. а) 5; 7; 3; 2; 10; б) 8; 9; 3125; 32; 81; в) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{4}$; г) $\frac{343}{20}$; д) 4. **4.13.** а) $r > 0$; б) $r < 0$. **4.17.** а) $x^{0,75}$; б) $a^{\frac{5}{6}}$; в) $x^{\frac{1}{8}}$; г) $b^{-\frac{2}{3}}$. **4.19.** а) $a^{\frac{3}{4}}$; б) $x^{\frac{9}{8}}$.

4.21. а) $\frac{1}{12}$; б) $-\frac{16}{225}$. **4.22.** а) 1; б) $-a^{0,5}$; в) $a(a^2-1)$; г) 2. **4.25.** а) $1+\frac{1}{n}$; б) $3+\frac{1}{n}$; в) $1+\frac{1}{n}$. **4.29.** а) 1; б) 1; в) 0; г) 1; д) 1; е) 1,5. **4.30.** а) $\frac{1}{\varepsilon}$; б) $\frac{2}{\varepsilon}$; в) $\frac{3}{2\varepsilon}$; г) $\frac{5}{\varepsilon}$; д) $\frac{1}{\varepsilon}$; е) $\frac{1}{\varepsilon}-2$. **4.32.** а) $N=M$; б) $N=M$; в) $N=\frac{M}{100}$; г) $N=\sqrt{M}$; д) $N=\frac{M}{3}$; е) $N=20\sqrt{5M}$. **4.35.** а) 1; б) 2; д) $\frac{1}{2}$; ж) $+\infty$; з) 0. **4.36.** а) $\frac{1}{2}$; б) $+\infty$; в) 0; г) 0. **4.37.** а) $+\infty$; б) $+\infty$; в) 0; г) 6. **4.38.** а) 1; б) 0,5; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{1}{9}$. **4.39.** а) $\frac{8}{9}$; б) $\frac{10}{33}$; в) $\frac{32}{99}$; г) ряд не сходится. **4.41.** а) $0,7+0,07+0,007+\ldots+7\cdot(0,1)^n+\ldots$; б) $0,31+0,0031+\ldots+31\cdot(0,01)^n+\ldots$; в) $0,025+0,00025+\ldots+2,5\cdot(0,01)^n+\ldots$; г) $2,3+0,054+0,00054+0,0000054+\ldots$, где $a_1=2,3$, для $n\geqslant 2$ $a_n=5,4\cdot(0,01)^{n-1}$. **4.42.** $S_1=\frac{a^2}{2}$; $S_2=\frac{3a^2}{4}$; $S_3=\frac{7a^2}{8}$; $S_4=\frac{15a^2}{16}$; $S_n=a^2-\frac{a^2}{2^n}$. Ряд сходится, $S=a^2$. **4.43.** а) $\left(2-\left(\frac{5}{9}\right)^n\right)a^2$; б) $2a^2$. **4.44.** а) $P_n=3a\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$; $S_n=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1,6-0,6\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$; б) $+\infty$; в) $\frac{2\sqrt{3}}{5}a^2$. **4.48.** К концу года сумма увеличится в $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ раз. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2,7$. **4.51.** а) 4; б) $3^{1-\pi}$; в) 25; г) 3; д) 4; е) 9. **4.55.** г) $\left(\frac{3}{4}\right)^\pi<1$; д) $5,7^{5,7}>1$; е) $0,3^{0,3}<1$; и) $\pi^e<3,2^{2,8}$. **4.59.** 3 корня.

§ 5

5.4. а) 2; б) 4; в) 1; г) 3; д) 0; е) -1; ж) 2; з) 3; и) 5. **5.5.** а) 3; б) 5; в) 9; г) 15; д) 49; е) 49; ж) 9; з) 125; и) 100. **5.7.** а) 1; б) 2; в) -1; г) 1; д) 3; е) -1; ж) n; з) $\frac{1}{2}$; и) $-\frac{1}{3}$. **5.8.** а) 1; г) 1; д) 3; е) -2; ж) n; з) $\frac{1}{2}$; и) $-\frac{2}{3}$. **5.9.** а) 3; ж) 3; з) 25; и) $\frac{1}{9}$; к) 3; л) 9; м) $\frac{1}{8}$. **5.11.** а) 6; б) 4; в) -2; г) 8; д) -6; е) -8. **5.12.** а) -1; б) -9; в) -4; г) -1; д) -6; е) -10. **5.13.** а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) 1,5; г) 3; д) 6; е) 2,5. **5.14.** а) 9; б) 25; в) 9; г) 81; д) 343; е) 4. **5.15.** а) 9; б) 49; в) $\sqrt{5}$; г) 8; д) 27; е) $\sqrt[3]{2}$. **5.16.** а) $\frac{4}{3}$; б) 3,5; в) $\frac{3}{4}$; г) -6; д) -5. **5.17.** а) 1; б) 0; в) 1; г) 1; д) 2; е) 3. **5.18.** а) 1; б) 2; в) 2; г) 2; д) 1; е) 3. **5.19.** а) $2\log_2 3$; б) $6\log_4 5$; в) $5\log_3 4$; е) $\log_3 16$. **5.20.** а) 2; б) 2; в) 2; г) 2. **5.21.** а) 3; б) 2; в) 1,5; г) 2;

д) 3; е) 3; ж) π; з) $\frac{e}{2}$; и) 4π. **5.22.** а) $\frac{\log_2 5}{\log_2 3}$; б) 1,5; в) $\frac{\log_2 9}{\log_2 5}$; г) $\frac{5}{4}$. **5.23.** а) 5; б) 5; в) 2. **5.24.** а) 6; б) $\frac{4}{3}$; в) $\frac{20}{9}$. **5.25.** а) 5; б) 6; в) 5. **5.26.** а) 2; б) 5; в) 9; г) 7. **5.27.** а) 12; б) 1; в) 3; г) 4. **5.38.** а) 3 и lg 1,999; б) 3 и lg 2; в) −1 и lg 4,23. **5.39.** а) 0,5490; б) 1,5490; в) 2,5490; г) −0,4510; д) −1,4510; е) 3,5490. **5.41.** а) 3,020; б) 30,20; в) 0,3020. **5.45.** а) $[0; +\infty)$; б) $(0; +\infty)$.

§ 6

6.3. $\log_a b$. **6.4.** а) 5; б) −3; в) 0; г) 2; д) −1; е) −2; ж) 1. **6.5.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; е) нет корней; ж) нет корней. **6.6.** а) 3; б) $-\frac{1}{2}$; в) 1; г) 2; д) $\frac{1}{2}$; е) 4. **6.7.** а) $\log_3 4$; б) $\log_2 7$; в) $\log_5 \frac{1}{2}$; г) 1; $\log_3 2$; д) нет корней; е) 0,5; ж) 2; з) 0, 2; и) 0, 1. **6.8.** а) 2; б) 3; в) 0,5; г) 1,5. **6.10.** а) 32; б) $\sqrt{3}$; в) 0,2; г) $\frac{1}{4}$; д) $\frac{10}{3}$; е) 2. **6.11.** а) 4; б) 8; в) 4; г) 2. **6.12.** а) 16; в) 4. **6.13.** а) 2; б) 9; в) $2\sqrt{2}$; г) 9. **6.14.** а) 2; б) 9; в) 64; г) 16. **6.17.** а) 4; б) 1; в) 0,5; г) 1,2; д) 1, −2; е) 1. **6.18.** а) 3; б) 10; в) 1; г) 2; д) −3; е) $\frac{3}{4}$. **6.19.** а) 0, $\frac{3}{2}$; б) 0, $\frac{4}{3}$; в) 2, −1,2; г) −1, $\frac{7}{4}$. **6.20.** а) 1, 0,5; б) 2, $-\frac{1}{3}$; в) −2, 5,5; г) −1, 18. **6.22.** а) 10, 100; б) 0,1, $1000\sqrt{10}$; в) 10, $\sqrt[3]{100}$; г) 0,1, $\sqrt[5]{10}$. **6.23.** а) 0, $\log_5 2$; б) 1; $\log_7 2$; в) 0; г) 2. **6.24.** а) 0; б) нет корней; в) 1; г) 1. **6.25.** а) 1, $\log_3 \frac{3}{4}$; б) 0; в) нет корней; г) нет корней. **6.26.** а) 100; $\sqrt[3]{10}$; б) 100; 0,01. **6.27.** а) 2, 32; б) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$; в) 3, $\sqrt[5]{\frac{1}{27}}$; г) 0,3, $0,3^9$. **6.28.** а) 4, 0,67; б) 2, 0,889; в) 35, 1,667; г) −6, 3. **6.31.** а) $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; 3)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) нет решений. **6.32.** а) $[0{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; -0{,}5]$; в) $[-0{,}25; +\infty)$; г) $(-\infty; 0{,}5]$; д) $(-\infty; -0{,}5]$; е) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **6.34.** а) $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; 1)$. **6.39.** а) $(2; +\infty)$; б) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) $(0; 100)$; г) $(0; 1)$; д) $(1; +\infty)$; е) $(0; 0{,}01)$. **6.41.** а) $(0; 0{,}2)$; б) $\left(0; 3\frac{1}{3}\right)$; в) $(0{,}01; +\infty)$; г) $(0; 3]$; д) $(0; 1]$; е) $[1; +\infty)$. **6.42.** а) $(4; +\infty)$; б) $(0; 9)$. **6.43.** а) $[4; +\infty)$; б) $(0; 3]$; в) $[4; +\infty)$; г) $(0; 9]$. **6.44.** а) $(0; 2)$; б) $(3; +\infty)$; в) $(0; 5)$; г) $(2; +\infty)$. **6.46.** а) $[1{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; 2]$; в) $(-\infty; 0]$; г) $[0; +\infty)$. **6.50.** а) $(-\infty; -4) \cup (-3; +\infty)$; б) $(0; 2)$; в) $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$; г) $[1{,}5; 3]$; д) $[-3; -2]$; е) $(-\infty; 2{,}5] \cup [3{,}5; +\infty)$. **6.52.** а) $(-1; 0) \cup (3; 4)$; б) $(-\infty; -36) \cup (1; +\infty)$; в) $[-8; -7) \cup (0; 1]$;

г) $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$; д) $(-2; -1) \cup (3; 4)$; е) $[-2; -1) \cup (5; 6]$. **6.53.** а) $(0, 1) \cup (1; +\infty)$. **6.54.** а) $(0; 1) \cup (4; 5)$. **6.55.** а) $(9; +\infty)$; б) $(2; +\infty)$; в) $(1; 81)$; г) $(1; 8)$. **6.56.** а) $[1; 2]$; б) $(-2; -1)$; в) $(-\infty; 1]$; г) $(0,5; +\infty)$. **6.57.** а) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; 0) \cup (1; 2)$; в) $(0; 0,5) \cup (0,5; +\infty)$; г) $(-\infty; 0) \cup (0,5; 1)$. **6.58.** а) $(0; 1) \cup [2; +\infty)$; б) $(-\infty; 0) \cup (1; 2]$; в) $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$; г) $(0; 1]$. **6.59.** а) $\left(-\frac{1}{3}; -0,33\right) \cup (0; 3) \cup (33; +\infty)$; б) $(-0,111; -1) \cup (0; 100)$; в) $\left(\frac{2}{3}; 0,667\right] \cup (0,67; 34] \cup (334; +\infty)$; г) $\left(-\frac{1}{9}; -0,11\right) \cup [0; 1] \cup (111; +\infty)$. **6.60.** а) $(-\infty; 0,1) \cup (100; +\infty)$; в) $(-\infty; 0,01] \cup [1000; +\infty)$. **6.61.** а) $(0,1; 1) \cup (10; +\infty)$; б) $(0; 0,1] \cup (1; 100)$; в) $[0,1; 10] \cup (100; +\infty)$; г) $(0; 0,01) \cup [10; 100]$.

§ 7

7.8. а) 270°; б) 630°; в) −270°; г) −810°. **7.12.** а) 30°; б) −120°; в) −90°; г) 90°; д) 40°; е) 20°. **7.13.** а) $40° + 360° \cdot 1$; б) $220° + 360° \cdot (-2)$. **7.22.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 3$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 2$; в) $\frac{5\pi}{3} + 2\pi \cdot (-7)$; г) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot (-9)$. **7.26.** а) $\alpha = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **7.28.** а) 0; б) 1; в) 1; г) 0; д) 0; е) −1; ж) −1; з) 0; и) 0; к) 1; л) 0; м) 1. **7.37.** а) Да; б) да. **7.39.** а) Нет. Если бы точки, соответствующие углам в n радиан и m радиан, совпали, то разность $n - m$ делилась бы на 2π нацело (закончите доказательство). **7.40.** а) $\sin 4 < 0$; б) $\cos\frac{3\pi}{4} < 0$; в) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$; г) $\cos(-4) < 0$. **7.43.** а) $\sin 40° < \sin\frac{\pi}{4}$; б) $\cos\frac{\pi}{3} = \cos 60°$; в) $\sin 120° > \sin 130°$. **7.44.** а) $\sin 3 > \sin\pi$; б) $\cos 4 < \cos 5$; в) $\sin 1 > \sin(-1)$. **7.46.** а) 5; б) $1,5\sqrt{2} + 4$. **7.47.** а) $1 - \sqrt{3}$; б) $-2 - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.51.** а) Нет; б) да; в) да; г) да. **7.52.** а) Нет; б) да; в) нет. **7.53.** а) Да; б) да; в) нет; г) да. **7.54.** а) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; б) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **7.55.** а) −0,6; б) 0,8. **7.58.** а) 1; б) −1; в) $1 - \cos\alpha$; г) $-1 - \sin\alpha$. **7.59.** а) 0; б) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; в) 0; г) 2. **7.60.** а) $-2 \leqslant k \leqslant 0$; $\cos\alpha = \sqrt{-k^2 - 2k}$. **7.61.** а) $3,5(1 - \sqrt{3})$; б) 2. **7.65.** а) $\sin 91° > \sin 92°$; б) $\sin 195° > \sin 200°$. **7.66.** а) $\cos 101° > \cos 157°$; б) $\cos 190° < \cos 200°$. **7.67.** а) $\cos 1,6\pi < \cos 1,68\pi$; б) $\sin 4,5 < 0$. **7.69.** а) $\sin\alpha$; б) $-\cos\alpha$; в) $-\sin\alpha$; г) $-\cos\alpha$. **7.70.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$. **7.77.** а) Нет; б) нет; в) да; г) нет. **7.78.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$. **7.79.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{\pi}{2}$; в) 0; г) $\frac{\pi}{6}$; д) $\frac{\pi}{4}$; е) $-\frac{\pi}{3}$; ж) $-\frac{\pi}{6}$; з) $-\frac{\pi}{4}$; и) $-\frac{\pi}{3}$. **7.81.** а) $\alpha_1 = \arcsin\frac{1}{2}$; $\alpha_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{2}$; в) $\alpha_1 = \arcsin a$; $\alpha_2 = \pi - \arcsin a$.

7.83. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; в) $\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; к) $\arcsin\frac{5}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $\pi-\arcsin\frac{5}{6}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. **7.86.** а) Нет; б) нет; в) да; г) нет. **7.87.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $-\frac{1}{3}$. **7.88.** а) 0; б) π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{3}$; д) $\frac{\pi}{4}$; е) $\frac{\pi}{6}$; ж) $\frac{2\pi}{3}$; з) $\frac{3\pi}{4}$; и) $\frac{5\pi}{6}$. **7.90.** а) $\alpha_1=\arccos\frac{1}{2}$; $\alpha_2=-\arccos\frac{1}{2}$; в) $\alpha_1=\arccos a$; $\alpha_2=-\arccos a$. **7.93.** а) $2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\pi+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; к) $\arccos\frac{3}{4}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; $-\arccos\frac{3}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; л) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; $-\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **7.94.** а) $2\pi n<\alpha<\pi+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; е) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n<\alpha<\frac{9\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; ж) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n<\alpha<\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **7.95.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n<\alpha<\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n<\alpha<\frac{13\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; з) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n<\alpha<-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **7.96.** а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<\alpha<\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{3}+2\pi n<\alpha<\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **7.97.** а) $\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n<\alpha<\pi-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\pi-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n<\alpha<2\pi+\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; в) $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)+2\pi n<\alpha<\pi-\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **7.98.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n<\alpha<\frac{5\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; д) таких α нет. **7.100.** а) $-\arcsin 0{,}1$; г) $-\arcsin(\pi-3)$. **7.101.** а) $\pi-\arccos 0{,}1$; г) $\pi-\arccos(\pi-3)$. **7.103.** а) $\frac{\pi}{3}$; в) $-\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{6}$; е) $\frac{5\pi}{6}$; ж) $-\frac{\pi}{6}$; з) $\frac{5\pi}{6}$; и) $\frac{\pi}{4}$. **7.104.** а) $3\pi-9$; б) $9-2\pi$; в) $8-3\pi$; г) $8-2\pi$; д) $3-\pi$; е) 3.

§ 8

8.5. а) $\sqrt{3}$; б) $1-\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **8.6.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0; д) -1; е) -1; ж) -1; з) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **8.16.** а) $\operatorname{tg}60°>\operatorname{tg}30°$; б) $\operatorname{ctg}60°<\operatorname{ctg}30°$; в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}<\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}>\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$; з) $\operatorname{ctg}2>\operatorname{ctg}3$; и) $\operatorname{tg}1>\operatorname{ctg}2$. **8.18.** а) $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; б) $\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$. **8.20.** а) $2\operatorname{tg}^2\alpha$; б) $\cos\alpha-\sin\alpha$. **8.22.** а) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$;

б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$. **8.23.** а) $\operatorname{tg}^2\alpha$; б) $-\operatorname{ctg}^2\alpha$; в) $2\operatorname{tg}\alpha$; д) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$. **8.25.** а) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; б) $\sin\alpha\cos\alpha$. **8.32.** а) 1; б) 2; ж) 1999; з) -2000. **8.33.** а) 0; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $-\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{3}$; д) $-\frac{\pi}{3}$; е) $\frac{\pi}{6}$; ж) $-\frac{\pi}{6}$. **8.36.** а) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$, б) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; з) $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; и) $\operatorname{arctg}(-3) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **8.39.** а) 1; б) 2; в) -3. **8.40.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{6}$; д) $\frac{5\pi}{6}$; е) $\frac{2\pi}{3}$. **8.43.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; з) $\operatorname{arcctg} 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; и) $\operatorname{arcctg}(-3) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **8.45.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < \alpha < \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; и) $-\frac{\pi}{6} + \pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; к) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < \alpha < -\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **8.46.** а) $\pi n < \alpha < \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n < \alpha < \pi + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; л) $\pi n < \alpha < \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; м) $\frac{5\pi}{6} + \pi n < \alpha < \pi + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **8.47.** а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < \alpha < \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **8.49.** а) $-\operatorname{arctg} 2$; б) $-\operatorname{arctg} 3$. **8.50.** в) $\pi - \operatorname{arcctg}(\pi - 2)$; г) $\pi - \operatorname{arcctg}(3\pi - 9)$. **8.52.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $-\frac{\pi}{4}$; д) $-\frac{\pi}{6}$. **8.53.** а) $5 - 2\pi$; б) $5 - \pi$.

§ 9

9.2. а) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. **9.3.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **9.4.** а) -1; б) 0. **9.5.** а) $-\sin\alpha$; б) $\sqrt{3}\sin\alpha$. **9.6.** $\cos(\alpha+\beta) = \frac{7}{25}$; $\cos(\alpha-\beta) = 1$. **9.10.** а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) 1. **9.11.** а) $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$; б) $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$. **9.15.** а) $-0{,}2$; б) $\frac{1}{3}$. **9.16.** а) 0,35; б) $\frac{17}{30}$. **9.20.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin\frac{2\pi}{13}$. **9.21.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-\cos\frac{\pi}{5}$. **9.23.** а) $\cos 10°$; б) $\cos 20°$; в) $\sin 8°$. **9.24.** а) $\cos\frac{\pi}{6}$; б) $\sin\frac{\pi}{6}$. **9.27.** а) $\frac{1}{2}$; б) 0; в) 1; г) 1. **9.28.** а) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; г) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. **9.35.** а) $2\sin 15°\cos 5°$; б) $\sqrt{2}\sin 15°$; д) $2\sin\frac{\pi}{40}\sin\frac{9\pi}{40}$; з) $2\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{\pi}{20}$.

9.36. д) $\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$; е) $\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$. **9.37.** а) $4\cos 5°\cos 10°\cos 25°$; б) $4\cos 5°\sin 11{,}5°\cos 2{,}5°$. **9.39.** а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$. **9.41.** а) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$; б) $\frac{1}{4}$. **9.48.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$. **9.49.** в) $\cos 40°$; г) $\cos 2\alpha$. **9.52.** а) $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$; б) $\cos 2\alpha < 2\cos\alpha$; **9.56.** а) $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) 1; г) $-\sin\alpha-\cos\alpha$; д) 1; е) 1. **9.59.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **9.61.** а) 1; б) 1; в) 5; г) 5. **9.64.** а) $\frac{1}{8}$; б) $-\frac{1}{8}$. **9.67.** а) $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; д) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$. **9.73.** а) $-2-\sqrt{3}$; б) $2+\sqrt{3}$. **9.74.** а) 6,2; б) 0,76. **9.76.** а) $\alpha \ne 45° + 180°\cdot n$, $n \in \mathbf{Z}$; $\alpha \ne 90° + 180°\cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$; б) $\alpha \ne -45° + 180°\cdot n$, $n \in \mathbf{Z}$; $\alpha \ne 90° + 180°\cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$. **9.81.** а) $\frac{7}{24}$; б) $-\frac{8}{15}$. **9.82.** а) $\sqrt{2}-1$; б) $2-\sqrt{3}$.

§ 10

10.3. б) $x=\frac{\pi}{2}$. **10.6.** а) $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ — промежуток убывания; $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ — промежуток возрастания. **10.7.** а) $\sin\frac{\pi}{7}<\sin\frac{3\pi}{7}$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)>\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$. **10.9.** а) 2; б) 2; в) 7; г) 63. **10.15.** а) $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ и $\left[2\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$ — промежутки убывания; $[\pi; 2\pi]$ — промежуток возрастания. **10.16.** а) $\cos\frac{3\pi}{7}<\cos\frac{2\pi}{7}$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) > \cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right)$. **10.23.** а) Например, $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$; $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$. **10.24.** а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$; б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)<\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$. **10.31.** Например, $\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$; $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$; $(\pi; 2\pi)$. **10.32.** а) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}>\operatorname{ctg}\frac{6\pi}{7}$; б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)<\operatorname{ctg}\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$.

§ 11

11.3. а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; б) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; в) $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; ж) $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; з) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; и) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

11.4. а) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; е) $\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **11.5.** а) $\arcsin\frac{1}{7}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $\pi-\arcsin\frac{1}{7}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; б) $\arccos\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $-\arccos\frac{1}{3}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; в) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $\pi-\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; тот же ответ можно записать так: $-\arcsin\frac{3}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $\pi+\arcsin\frac{3}{4}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; или так: $(-1)^{m+1}\arcsin\frac{3}{4}+\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}$; г) $\arccos\left(-\frac{3}{8}\right)+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $-\arccos\left(-\frac{3}{8}\right)+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; тот же ответ можно записать так: $\pi-\arccos\frac{3}{8}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $-\pi+\arccos\frac{3}{8}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; или так: $\pm\arccos\left(-\frac{3}{8}\right)+2\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}$; или так: $\pm\left(\pi-\arccos\frac{3}{8}\right)+2\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}$. **11.6.** а) Нет корней; в) нет корней; д) нет корней. **11.7.** а) При $a\in[-1;\ 1]$; в) при любых значениях a. **11.8.** а) $\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; д) $\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; ж) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. **11.9.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in \boldsymbol{Z}$; д) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **11.10.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; б) $2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; г) $\pi+2\pi n;\ n\in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $-\mathrm{arctg}\,3+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. **11.11.** а) $\pm\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; б) $\pm\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. **11.12.** а) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; ж) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; к) $\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **11.13.** а) $\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{12}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; г) $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in \boldsymbol{Z}$; ж) $\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3},\ n\in \boldsymbol{Z}$; к) $\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3},\ n\in \boldsymbol{Z}$. **11.15.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; в) $\pi+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **11.16.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi n}{4},\ n\in \boldsymbol{Z}$; в) $2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in \boldsymbol{Z}$; д) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; е) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. **11.18.** а) $2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{\pi}{12}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $\frac{7\pi}{12}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; д) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $-\pi+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; е) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **11.19.** а) πn,

$n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$; б) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **11.20.** а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{6}$ — корень уравнения; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{7\pi}{3}$ — корень уравнения. **11.22.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{6}$ — наибольший корень уравнения из отрезка $[-3\pi; \pi]$; б) $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{7\pi}{3}$ — наименьший корень уравнения из отрезка $[-2{,}5\pi; -0{,}5\pi]$. **11.23.** а) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **11.26.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **11.27.** а) $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\operatorname{arctg} 5 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **11.29.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $-\operatorname{arctg} 4 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{7} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **11.30.** а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. **11.31.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $\pm\arccos\frac{1}{16} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{12} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. **11.34.** а) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; ж) $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{13\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; к) $\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **11.35.** а) $\left(\arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n; \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\left(\pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n; 2\pi + \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **11.36.** а) $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; ж) $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; к) $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **11.37.** а) $\left(-\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n; \arccos\frac{3}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\left(\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n; 2\pi - \arccos\frac{3}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **11.39.** а) $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n;\right.$

$\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; ж) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; к) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.
11.40. а) $\left(\operatorname{arctg} 2+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; г) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\operatorname{arctg} 2+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.
11.41. а) $\left(\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; г) $\left(\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; ж) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \pi+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; к) $\left(\frac{3\pi}{4}+\pi n; \pi+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **11.42.** а) $(\pi n;\ \operatorname{arcctg} 2+\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$; г) $(\operatorname{arcctg} 2+\pi n;\ \pi+\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$. **11.43.** а) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; д) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; е) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. **11.44.** а) $\left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; $\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k; \pi+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.
11.45. а) $\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **11.46.** а) $(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.
11.47. а) $\left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}; \frac{2\pi n}{3}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **11.48.** а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **11.49.** а) $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; е) $\arcsin\frac{12}{13}-$ $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **11.50.** а) $\arcsin\frac{2}{\sqrt{41}}+\arcsin\frac{5}{\sqrt{41}}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $\pi-\arcsin\frac{2}{\sqrt{41}}+$ $+\arcsin\frac{5}{\sqrt{41}}+2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **11.56.** а) $2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **11.57.** а) $-\frac{\pi}{4}+$ $+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **11.58.** а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$. **11.59.** а) $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; б) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; в) $\left(2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; г) $\left(2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

§ 12

12.8. а) 0,1; б) $\frac{1}{45}$; в) 1; г) $\frac{1}{90}$. **12.10.** а) $\frac{1}{90}$. **12.11.** а) 0,5; б) 0,25; в) 0,1; г) 0,1. **12.12.** $\frac{1}{120}$. **12.13.** $\frac{1}{625}$. **12.14.** $\frac{1}{3024}$. **12.15.** а) $\frac{7}{20}$; б) $\frac{13}{20}$; в) 0; г) 1. **12.16.** $\frac{1}{7}$. **12.17.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{24}$. **12.24.** 10 очков. **12.25.** 22%. **12.26.** $\frac{7}{16}$.

§ 13

13.3. 0,512. **13.5.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{1}{2}$. **13.6.** д) $\frac{2}{5}$; е) $\frac{3}{7}$; ж) $\frac{1}{4}$; з) 0.
13.10. а) 0,56; б) 0,14; в) 0,24; г) 0,06; д) 0,94.

§ 14

14.1. $-\frac{1}{2}$ р. **14.3.** Игра несправедливая. **14.5.** Игра несправедливая. **14.7.** 2 : 1. **14.8.** Первый игрок должен получить 157,5 ливров, второй — 52,5. **14.9.** 11 : 5. **14.11.** Первое событие вероятнее второго. **14.12.** а) ab; б) $1 - a - b + ab$; в) $a + b - 2ab$. **14.13.** В данном примере $p = 0{,}9$, $q = 1 - p = 0{,}1$. а) $n = 5$, $k = 0$. Тогда $P_5(0) = C_5^0 \cdot (0{,}9)^0 \cdot (0{,}1)^5 \approx 0{,}00001$; б) $P_5(1) \approx 0{,}00045$; в) $P_5(2) \approx$ $\approx 0{,}00081$; г) $P_5(4) \approx 0{,}32805$; д) $P_5(5) \approx 0{,}59049$. **14.14.** а) Искомая вероятность равна $P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) = \frac{56}{1024} \approx 0{,}0547$. **14.16.** а) 0,0016; б) 0,0256; в) 0,1536; г) 0,4096; д) 0,4096.

Задания для повторения

1. а) 7; б) 2476; в) 25; г) 0,75; д) 0,5; е) 300; ж) $-\frac{1}{4}$. **2.** а) 0,74; б) 2,77; в) $-2\frac{13}{31}$. **3.** а) 2,37; б) 1. **4.** 12. **5.** а) -1; б) 2; в) 32,36. **11.** а) $-3{,}5$; б) $-6{,}25$; в) -32; г) 1,25; д) 1,5; е) 0,5. **12.** -115. **15.** а) -5; б) 179; в) 8. **16.** а) 1; д) 1; е) 31; ж) 1; з) 3. **19.** а) 2; б) 1; в) 3; г) 27; д) -1. **20.** а) 1; б) -1; в) 0; г) 1. **21.** -1. **22.** $2x$. **23.** $-\frac{1}{2a}$. **24.** $\frac{x-3}{2}$. **25.** а) $\frac{3-x}{x}$; в) $\frac{x+1}{x-1}$; г) $x + 3$; д) $-\sqrt{x} - 1$. **26.** а) 2; б) $2x$; г) 1; д) $\frac{9}{a-b}$. **27.** а) 2; б) 5; в) 1; г) 1. **28.** 1. **30.** а) 2; б) $2\sqrt{2}$; в) $-4\sqrt{3}$; г) 1; д) 0,1. **31.** а) 1; б) 2; в) -2; г) 1,75; д) 3,5. **32.** 3. **33.** а) 9; б) 0,25. **34.** 16,5. **35.** а) 39; б) 1; $-0{,}5$; в) $-0{,}5$; 3; г) 1; 4,5; д) -2. **36.** а) 2; б) 1; в) -4; 0; г) $\frac{2}{3}$; 2; д) $[-3{,}5;\ 7{,}5]$; е) -25; 3; ж) -30; 4; з) $\left(-\infty; \frac{4}{7}\right]$. **37.** г) 1; $\frac{\sqrt{17}-5}{2}$; д) 4; $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$. **38.** а) $-\frac{3}{4}$; б) $-\frac{4}{5}$. **39.** а) -10; б) 4; в) -30. **40.** а) 2; б) 25. **41.** а) 3; б) 5; в) 7. **44.** -1; 2. **45.** а) 3; б) 1. **46.** 6. **47.** 6. **48.** а) 9; б) -125; в) 0,16; г) $-0{,}75$. **49.** а) 2; б) 13,5; в) -2; г) 5. **50.** а) 8; б) 20; в) -4; г) 2. **51.** а) 5; б) -1; в) 6; г) 1. **52.** а) 6; б) 6; в) $5\frac{1}{3}$; г) 0,8. **53.** а) 0; 16; б) 0; 13; в) 7; г) 6; д) -4; $-2{,}5$; е) -2; -1. **54.** а) -2; б) -4. **55.** а) 0; -1. **58.** г) $-\sqrt{3}$; 0; 0,5; $\sqrt{3}$. **59.** а) $-\sqrt{5}$; -2; $\sqrt{5}$; б) -2; 2; 3; в) 4; г) 1,5; 2; 4; д) -3; 2; е) -2; -1; 1; 2. **63.** а) -6; б) 2; в) при $a \neq -6$; $a \neq 2$. **64.** а) 0,5; б) -1; в) при $a \neq 0{,}5$; $a \neq -1$. **69.** а) $(-4; -2)$; б) $(3; 6)$; в) $(0; 1)$; г) $(-2; 3)$. **70.** а) $(0; 0)$, $(5; 1)$, $\left(-\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right)$; б) $(4; 1)$, $\left(-\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right)$. **71.** а) $(-1; 1; 2)$, $(-1; 1; -2)$; б) $(-2; 2; 3)$, $(-2; 2; -3)$. **72.** а) $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. **73.** а) $\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$,

$\left(\frac{3}{2}; \frac{11}{2}\right)$. **74.** (0; 2), (2; 0). **75.** а) (3; −2); б) (1; −6); в) (2; −3); г) (−5; 1). **76.** а) Если $b = 0$, $a \neq 0$, то x — любое действительное число, $y = x$; если $b \neq 0$, то $x = a + ab^2 - b^3$, $y = a + ab^2 + b^3$. **77.** а) (7,5; +∞); б) $\left(-\infty; \frac{11}{3}\right)$; д) [3; +∞); е) $\left(-\infty; \frac{15}{7}\right]$. **80.** а) (−∞; 2) ∪ (3; +∞); б) (4; 6); д) (4; 6); е) (7; 9); ж) (−∞; 3] ∪ [5; +∞); з) [1; 3]; л) [−6; −1]; м) [−5; −1]. **81.** а) (1; 5); 0 — наименьшее целое решение неравенства; б) [2; 7]; 7 — наибольшее целое решение неравенства. **82.** а) $(-\infty; 2 - \sqrt{8}] \cup \{2\} \cup [2 + \sqrt{8}; +\infty)$; б) $\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)$. **83.** а) (−5; −4) ∪ (1; +∞); б) (−∞; −1) ∪ (4; 6); в) (−3; 1) ∪ (4; +∞); г) (−∞; −5) ∪ (−3; −1); д) (−5; −2) ∪ (−2; −1) ∪ (1; +∞); е) (−∞; −2) ∪ (−1; 2) ∪ (2; 3); ж) (−4; 1) ∪ (1; +∞); з) (−∞; −5). **84.** а) $(-\infty; -1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}; +\infty)$; б) (2; 3); в) $(1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3})$; г) (−2; 1) ∪ (1; 4); д) $(-1-\sqrt{5}; \sqrt{10})$; е) $\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$. **85.** а) (−∞; 0] ∪ [1; 2] ∪ [5; +∞); в) (−∞; 0] ∪ [2; 3] ∪ [4; +∞). **86.** а) (−9; 8); б) (4; +∞); в) (−∞; 0); г) (−∞; −3) ∪ (−3; 1); д) (−∞; −1); е) (−1; 1) ∪ (2; +∞). **87.** а) (−∞; −2] ∪ (0; 0,25]; б) (1; 2); в) (1; 2); г) (−1; 0,5). **88.** а) [−6; 0); б) (−∞; 6]. **89.** а) (−∞; −2) ∪ [−1; +∞); б) $\left[\frac{5}{6}; 1\right)$. **90.** а) (−∞; −5) ∪ [1; 2]; б) (−∞; −7) ∪ [−3; 2]. **91.** а) (−∞; 1] ∪ (1996; +∞); б) (−∞; 2) ∪ (2; 3) ∪ (5; +∞); в) [−5; 1] ∪ (2; 3). **93.** а) (−∞; −3] ∪ (−1; 3) ∪ (3; +∞); б) (−∞; −5) ∪ (−5; 4) ∪ [5; +∞). **95.** а) $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right)$; б) (−∞; −2) ∪ (−1; 2); в) [−1; 1) ∪ (1; 3]; г) [1; 2]. **96.** а) (−∞; −2] ∪ (−1; 0) ∪ (0; +∞); б) (−∞; 0) ∪ (0; 1) ∪ [2; +∞); в) (−∞; −1); г) $\left(-2; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 2\right)$. **97.** а) (−8; −2) ∪ (0; 2); б) (−∞; −4) ∪ (0; 4) ∪ (6; +∞); в) (−3; −1) ∪ (0; 3); г) (−∞; −5) ∪ (0; 5) ∪ (9; +∞). **98.** а) (−∞; −1) ∪ (1; 5); 4 — наибольшее целое решение. **99.** а) $\left(-2; -\frac{3}{2}\right) \cup (1; +\infty)$; б) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$. **100.** а) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{-2+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$; б) (−∞; 2) ∪ (2,5; +∞). **101.** а) {−1} ∪ (0; 2). **102.** а) (3; 4) ∪ (4; 7); б) (−13; −4) ∪ (−4; −1). **105.** а) (20; 8); б) (6; 16); в) (7; 19); г) (7; 21). **106.** а) 3; б) 2; в) 5; г) 4; д) 77; е) 312; ж) 110. **107.** 6. **108.** а) 24 850; б) 4000. **109.** 75. **110.** а) 58; б) 1; $\frac{1}{3}$. **111.** а) 4; б) 2. **112.** −27 или 27. **113.** 40. **114.** а) 261; б) 321. **115.** а) 11; б) 307,5. **116.** а) 231; б) −200.

117. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{4}$. **118.** а) 2; б) −3,6; в) 0,45; г) 9. **119.** а) $\frac{-1+\sqrt{1+\frac{8n}{5}}}{2}$, где $n = 6, 7, \ldots, 250$; б) $\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{5n}{8}}\right)^{-1}$, где $n = 4, 5, \ldots, 100$. **120.** а) 9; б) 6; в) $\frac{1}{3}$. **121.** а) 18; б) 25. **122.** 0. **123.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{3}{2}$; д) $\frac{1}{2}$; е) 1. **124.** а) 3; б) 0. **125.** а) 5; б) 6; в) 7. **126.** а) 6; б) 4; в) 5; г) 12,5; д) 9; е) −4. **127.** а) $\frac{a+2b-1}{3a}$; б) $\frac{3-2a}{a+2b}$. **128.** а) $\frac{2(ab+a+1)}{ab+3a+2}$; б) $\frac{1+2a+ab}{1+a+2ab}$; в) $\frac{3+a+ab}{2+a+2ab}$; г) $\frac{2+a+2ab}{1+2a+ab}$. **129.** а) 1,5. **130.** а) $\frac{2\sqrt{3}-21}{10\sqrt{3}+42}$. **131.** а) $\log_3 25 < \log_2 11$; д) $\log_4 3 > \log_3 2$. Указание. Умножьте данные логарифмы на 4 и сравните полученные числа с числом 3. **134.** а) 1; б) 1; в) 5; г) 1; д) 2; е) 3. **135.** а) 3; б) 4. **136.** а) 1; б) 2. **137.** а) 2; б) 2. **138.** а) 3; б) $\log_9 2$. **139.** а) Нет корней; б) 2; в) 0; г) 2, −1. **143.** а) 0, 2; б) 0; в) 0; г) 3. **144.** а) 0; б) 2; в) 1, 3; г) $\log_3 77$. **145.** 1. **146.** а) 2; б) 2; в) 1; г) 1. **147.** а) 243; б) 32. **148.** а) 16; б) 25. **149.** а) −1, −2; б) 2. **150.** а) 4; б) 27. **151.** а) 2, 8; б) 3, 27. **153.** а) $\frac{1}{4}$, 4; б) $\frac{1}{9}$, 9; в) $\frac{1}{2}$, 2; г) $\frac{1}{5}$, 5. **154.** 100. **155.** а) $(-\infty; 2]$; б) $[0; 2]$; в) $(-\infty; \log_3 2]$; г) $(-\infty; 0]$. **156.** а) $(-\infty; 2)$; б) $(-\infty; \log_2 5]$; в) $(-\infty; -\log_5 10]$. **157.** а) $(0; \log_2\sqrt{3}) \cup [1; +\infty)$; б) $[\log_2\sqrt{3}-1; +\infty)$; в) $\left[\log_3\frac{1}{2}; 0\right) \cup (\log_9 2; 1]$; г) $[\log_{16}\sqrt{3}-1; +\infty)$. **158.** $(-\infty; 0)$. **159.** $(-\infty; \log_5 4 - 1) \cup (0; +\infty)$. **160.** а) $(-\infty; \log_3 2 - 1) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. **161.** а) (0,5; 2); б) (−2; 0). **162.** а) $\{1\} \cup (2; +\infty)$; 1 — наименьшее решение; б) $(-\infty; -1) \cup \{2\}$; 2 — наибольшее решение; в) $\{1\} \cup (3; +\infty)$; 1 — наименьшее решение; г) $(-\infty; -1) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$; $\frac{1}{2}$ — наибольшее решение. **163.** а) $(2; +\infty)$; в) (0; 3); д) $(1; +\infty)$; е) (0; 1). **164.** а) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; в) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; д) (0; 1); е) $(1; +\infty)$. **165.** а) $(3; +\infty)$; б) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; в) (1; 3); г) $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. **166.** а) (1; 3); б) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; в) $(3; +\infty)$; г) $\left(0; \frac{1}{3}\right)$. **167.** а) $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{64}\right] \cup (1; 64]$; б) $\left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup [4; +\infty)$; в) $(1; 7) \cup (7; +\infty)$; г) $(0; 1) \cup (5; 25)$. **168.** а) $(0; 1) \cup (16; +\infty)$; б) $(0; 1) \cup (9; +\infty)$; в) $\left(0; \frac{1}{64}\right) \cup (1; +\infty)$; г) $(0; 0{,}5) \cup (1; +\infty)$. **169.** а) $\left(-1; 10\frac{1}{9}\right)$; б) (−1,5; 23,5). **173.** а) $2\,\mathrm{tg}\,\alpha$; б) $2\cos\alpha$. **174.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$.

175. а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **176.** а) 1; б) $-\sqrt{3}$; в) 1; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **177.** а) $-\sqrt{3}$; б) -1; в) $-\sqrt{3}$; г) -1. **179.** а) $\frac{1}{\sin\alpha}$; б) $\frac{1}{\cos\alpha}$; в) $\sin^2\alpha$; г) $\cos^2\alpha$. **180.** а) $\frac{1}{4}$; б) 21,5; в) -1; г) $-3{,}5$. **181.** а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{3}{4}$; в) -4; г) $\frac{-4\sqrt{3}}{3}$. **182.** а) $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}4$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{5}{12}$; б) $\sin\alpha=-\frac{40}{41}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{40}{9}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{9}{40}$. **183.** а) $\sin\alpha=0{,}6$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$; б) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}4$; в) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$; г) $\sin\alpha=\frac{3}{4}$; д) $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$; е) $\sin\alpha=-\frac{3}{4}$. **187.** а) $\operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha$; в) $\sin\alpha\cos\alpha$; г) 2. **188.** а) $\cos^2\alpha$; б) $\sin^2\alpha$; в) 0; г) 0. **189.** а) -1; б) $-\sqrt{3}$. **191.** а) $-\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$. **192.** а) $\sin 2\alpha=-\frac{24}{25}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$; б) $\cos 2\alpha=\frac{119}{169}$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{26}}{26}$; в) $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-2$; г) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{3}$; д) $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{2}$; е) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{26}}{26}$. **193.** а) $\frac{120}{119}$; б) $\frac{240}{161}$; в) $\frac{24}{7}$. **194.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 0; д) 0,6; е) $-0{,}8$; ж) -2; з) -4; и) -10; к) -5. **196.** а) $\sin x$; б) $-\cos x$; в) 1; г) -1; д) $2\cos x$; е) $2\sin 2x$. **197.** а) $\sin x$; πn, $n\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; б) $\cos x$; $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **199.** а) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{30}+\frac{\pi k}{5}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **200.** а) πn, $n\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; б) $2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; в) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $\pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **201.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; б) πn, $n\in\boldsymbol{Z}$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; в) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **202.** а) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $(-1)^n\arcsin\frac{2-\sqrt{13}}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; в) $\pm\arccos\frac{\sqrt{5}-2}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **203.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **204.** а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **205.** а) πn, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3 корня; б) πn, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4 корня; в) $3\pi+6\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $12\pi k$, 2 корня; г) $6\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $\pi+12\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $5\pi+12\pi m$, $m\in\boldsymbol{Z}$; 4 корня. **206.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; в) $\frac{(-1)^n}{3}\arcsin\frac{-3+\sqrt{29}}{8}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3-\sqrt{79}}{10}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **207.** а) $\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$;

$\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; в) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; г) $\pm\frac{2\pi}{21}+\frac{4\pi n}{7}$, $n \in \mathbf{Z}$; д) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
208. 360 р. **209.** а) 25%; б) 15,2%; в) 25%. **210.** 6,25 кг. **211.** а) На 10%; б) на 10%. **212.** а) 126 р.; б) 322,5 р. **213.** 840. **214.** а) На 300%; б) на 700%; в) на 27,1%. **215.** 40 к. **216.** 37,5%. **217.** На 15%. **218.** На 20%. **219.** 50%. **220.** 80 и 120 тыс. р. **221.** $\frac{5}{6}$. **222.** На 37,5%. **223.** а) 4%; б) 6%. **224.** 10. **225.** а) 5%; б) 2%; в) 2%. **226.** а) $\frac{1}{4}$ кг; б) $1\frac{3}{4}$ кг. **227.** а) 441 г; б) 4 л. **228.** а) 10%; б) 80%. **229.** а) 5%; б) 53%. **230.** На 9 частей первого сплава надо взять 35 частей второго. **231.** На 3 части первого сплава надо взять 8 частей второго. **232.** Мера пшеницы, ячменя и овса стоит 5, 3 и 2 шиллинга соответственно. **233.** а) 5 л; б) 3 кг; в) 40%; г) 5 кг. **234.** а) 80%; б) 8%. **235.** а) 2 л; б) 35%. **236.** а) 60%; б) 30%. **237.** а) За 4,8 ч; б) за 1,5 ч. **238.** а) За 20 ч; б) за 20 ч; в) за 2,5 мин. **239.** 2 : 3. **240.** 97. **241.** 625 м. **242.** 38 км/ч. **244.** а) $1\frac{1}{5}$ ч; б) $1\frac{3}{4}$ ч. **245.** а) 5; б) 4. **246.** а) 32; б) 43; в) 45; г) 53. **247.** а) 63,5; б) 135; в) 17,5; г) 10. **248.** а) 80; б) 36. **249.** а) 240 км; б) 42 км/ч; в) 50 км/ч; г) 60 км/ч. **250.** а) 24 км/ч; б) 72 км/ч. **251.** $106\frac{2}{3}$ км. **252.** 16 км. **253.** В $\frac{9}{7}$ раза. **254.** На 17%. **255.** 50 деталей. **256.** 9 лет. **257.** 176 человек. **258.** 140 $м^3$. **259.** 2 кг. **260.** 4,5 ч. **261.** 36 км/ч. **262.** За 15 ч. **263.** За 20 ч и 30 ч. **264.** 15 дней. **265.** 2. **266.** За 64 дня. **267.** За 24 ч. **268.** 48 км/ч. **269.** 8 км/ч. **270.** 180 км. **271.** 11 дней. **272.** 36 км/ч. **273.** 16 лет. **274.** 300. **275.** 150. **276.** 12 месяцев. **277.** 6 месяцев. **278.** Получили хотя бы одну пятерку 94 абитуриента, только одну пятерку — 65 абитуриентов. **279.** 8 р., 12 р., 5 р., 20 р. **280.** Через 23 дня. **281.** Из 24 деталей. **282.** Из 36 деталей. **283.** 50 р., $66\frac{2}{3}$ р., $83\frac{1}{3}$ р. **284.** 87,5 р., 50 р., 62,5 р. **285.** 5 ч. **286.** За 10 и 15 ч. **287.** 9 ч. **288.** В 11 ч. **289.** 110 км. **290.** 18 км. **291.** $0{,}2c-42$. **292.** Вчера 18 раков, сегодня 16 раков. **293.** 9. **294.** $(a+\sqrt{ab})$ мин, $(b+\sqrt{ab})$ мин; а) 36 и 45 мин; б) 42 и 56 мин. **295.** $\frac{(L+6)(L-10)}{6(L-5)}$ км/ч. **296.** Первый — за $(t-2+\sqrt{t^2+4})$ ч, а второй — за $(t+2+\sqrt{t^2+4})$ ч. **297.** $\sqrt{\frac{tv^2-2vl}{t}}$ м/с. **298.** $q=\left[\frac{100p}{p+100}\right]$; а) $q=23$; б) $q=20$. **299.** $q=\left[\frac{(p-d)100}{p+100}\right]$; а) $q=15$; б) $q=12$. **300.** $b=\frac{100(a-c)}{100-c}$; а) $b=60$; б) $b=58\frac{1}{3}$. **301.** В 1,5 раза. **302.** 3 : 2. **303.** 2. **304.** 3. **305.** 2. **306.** 1. **307.** 3. **308.** 1. **309.** –3. **310.** 17. **311.** 2. **312.** –10. **313.** –5. **314.** 1240. **315.** (–1; 2].

Оглавление

ГЛАВА I. КОРНИ, СТЕПЕНИ, ЛОГАРИФМЫ

ГЛАВА III. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ 362

Учебное издание

Никольский Сергей Михайлович
Потапов Михаил Константинович
Решетников Николай Николаевич
Шевкин Александр Владимирович

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
10 класс

Учебник для общеобразовательных учреждений

Базовый и профильный уровни

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художники *П. С. Барбаринский, О. П. Богомолова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *М. Е. Аксеновой*
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*
Корректор *Л. С. Александрова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93 — 953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с диапозитивов 13.11.08. Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 24,69 + 0,54 форз. Тираж 40 000 экз. Заказ № 21685 (Ш-Гз).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Открытое акционерное общество «Смоленский полиграфический комбинат».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

Свойства корней степени n

Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c > 0$,
$m \in N$, $n \in N$, $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$, то:

$$\sqrt[n]{a^n} = a \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Свойства степеней

Если $a > 0$, $\alpha \in R$, $\beta \in R$, то:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$$

$$a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$$

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$$

Если $a > 1$, $\alpha < \beta$, то $a^\alpha < a^\beta$

Если $0 < a < 1$, $\alpha < \beta$, то $a^\alpha > a^\beta$

Свойства логарифмов

Если $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$,
$M > 0$, $N > 0$, $\gamma \in \boldsymbol{R}$, то:

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^\gamma = \gamma \log_a M$$

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

Перестановки, размещения, сочетания

Если $n \in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{N}$, $k \leqslant n$, то:

$$P_n = n!$$

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Основные формулы тригонометрии

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\quad$ $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\quad$ $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}$ $\quad$ $\mathrm{tg}(\alpha + \pi k) = \mathrm{tg}\,\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}$

$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}$ $\quad$ $\mathrm{ctg}(\alpha + \pi k) = \mathrm{ctg}\,\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$

$\sin x = -1,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$

$\sin x = 0,\ x = \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$

$\sin x = a,\ |a| < 1,\ a \neq 0$

$x_1 = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

$\cos x = 1,\ x = 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$

$\cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$

$\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$

$\cos x = a,\ |a| < 1,\ a \neq 0$

$x_1 = \arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

$x_2 = -\arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

$\mathrm{tg}\, x = a, \quad a \in \boldsymbol{R}$
$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$

$\mathrm{ctg}\, x = a, \quad a \in \boldsymbol{R}$
$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$